# ベンハムのコマに関する動的干渉モデル

西山　豊

知覚心理学における主観色（Subjective colors）の研究はプレボー（1826 年）に始まり，フェヒナー（1839 年），ベンハム（1894 年）と続く[1)]。チャールズ・ベンハム（1860-1929）は白黒の図柄から色が浮かび上がるベンハムのコマ（Benham’s top）を考案し，そのおもちゃがイギリスで大流行となり，科学雑誌ネィチャーでも取り上げられたが，主観色の理由がわかっていない[2)]。

## 極座標から直交座標へ

ベンハムのコマは直径が約 10 センチの円盤で,下の半円は黒色で塗りつぶされていて，上の半円には 3 本ずつの円弧が描かれている（**図 1**）。円弧は中心角が 45 度で４つのブロックがある。

**図 1**　ベンハムのコマ

コマを勢いよくまわすと最初は何も見えない。コマの回転が減速して，パターンがちらつきだすと，その瞬間にぱっと色が浮かび上がってくる。コマを時計回り（右方向）にまわすと外から青，緑，橙（だいだい），赤の順に色が見える（**図 2**(1)）。コマを反時計回り（左方向）にまわすと外から赤，橙，緑，青の順に色が見える（**図 2**(2)）。

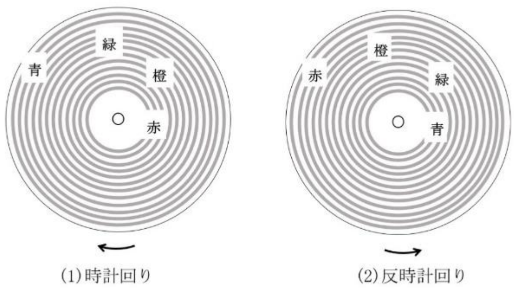


**図 2**　回転方向と色の順

私は，円弧の４つのブロックの中で，外でも中心でもない中間にある緑と橙の色に注目した。緑と橙の色は，コマを逆にまわすと，どうして色が逆になるのか。**図 3**(1)のよう

に，下の半円は黒で同じだが，上の半円は，円弧の位置が逆になっていることがわかる。中心角は一回りで 360 度であり，下半円の黒の中心角は 180 度であり，上半円の 180 度を白黒白の中心角で分割すると，時計回りで，

緑：黒（180 度）－白（45 度）－黒（45 度）－白（90 度）

橙：黒（180 度）－白（90 度）―黒（45 度）－白（45 度）

となる。

私は，今後の理論展開のために，**図 3**(2)のようにベンハムのコマで，外側と中心の円弧の位置を中心角で約 20 度，矢印のように下半円の黒と引っ付かないようにずらした。こうすることによって，黒っぽい色になっていた主観色が見やすくなった。そして，４つのブロックはどれも黒－白－黒－白のパターンとなった。

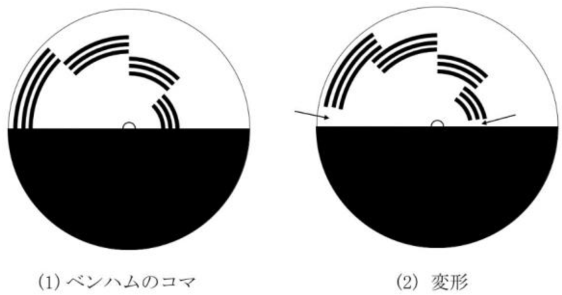


**図 3**　考察のための変形

**図 3**(2)のパターンで考えることにする。極座標を直交座標に置き換えると**図 4** のようになる。コマの外周に，反時計まわりに A と B，１から４の記号をつける。円盤は右方向に（時計回りに）まわっているとする。

円盤の中心から１は赤，２は橙，３は緑，４は青の主観色が見える。直交座標（**図 4** 右）では上から下に向かって赤，橙，緑，青となる。

１から４はどれも黒－白―黒―白の順になっている。最初の黒と二番目の黒の長さは同じであるが，二番目の黒を挟む前後の白の長さが違う。最初の白を第１次刺激，二番目の白を第２次刺激とするなら，この２つが何らかの干渉（強調，打消しなど）を起こすのではないかと考えられる。


**図 4**　極座標から直交座標へ

**動的な干渉**

ヤングの干渉実験や，シャボン玉の薄膜での干渉は，光が到達する径路差によって生ず

るものであった。ベンハムのコマは，視覚刺激（Visual stimuli）が眼球を通り，網膜を経て，錐体，視神経網から大脳に至る視覚系で色が認識されるので，この径路には，どこにも「径路差」に対応するものがない。ここでは「径路差」ではなく「位相差」で干渉が起こることを示していこう。

私は，1979 年に，第 1 次刺激が何らかの理由で遅れて第 2 次刺激に重なるとき，色が浮かび上がるのではないかと考えた（**図 5**）[3]。そして第 1 次刺激の遅れの大きさが浮かび上がる色の波長に関係するのではないか，遅れの大きさは第 1 次刺激の量に逆比例するのではないかと推測したが，理論までには至らなかった。

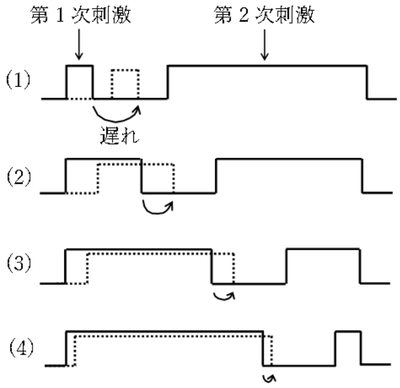


**図 5**　第 1 次刺激と第 2 次刺激の干渉

２つの波の位相がずれることによって波が強めあったり，打ち消しあったりすることを示そう。波長と振幅が同じ２つの正弦波を考え，位相差を$\alpha$とする。

$$y_1 = \sin(\theta + \alpha)$$

$$y_2 = \sin\theta$$

**図 6** で，重ね合わせの概観を示そう。第 1 次刺激と第 2 次刺激の正弦波は，振幅と波長が同じで周期が 5 である（上段)。位相差がないとき，２つの波が重ね合わされると，振幅が２倍で波長が同じの正弦波となる。第 1 次刺激の位相が 90 度ずれて第２次刺激に重なったとき，波の最大振幅は 1.4 倍になり，180 度ずれたときは，波は打ち消しあい振幅は 0 になり，360 度ずれたときは，振幅は２倍になる。

２つの正弦波の重ね合わせは，三角関数の和積の公式より

$$y_1 + y_2 = \sin(\theta + \alpha) + \sin\theta = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)$$

となる。

白色はあらゆる色を含んでいる。説明を簡単にするため赤，緑，青の３色とする。

**図 7** は，3 行 4 列の合計 12 個のグラフ群で構成される。左端の１列目は縦方向に，周期が４の赤，周期が５の緑，周期が６の青を配置している。この３つの波が重ね合わされると白になる。それぞれの行には横方向に，位相が赤の波長で 360 度ずれたとき，緑の波長で 360 度ずれたとき，青の波長で 360 度ずれたとき，第１次刺激と第２次刺激の波が重な

るときの状態を示している。

**図 7** を列の方向（縦の方向）で見てみよう。左から 1 列目は赤，緑，青を重ねると白になる。

2 列目は，赤の波長で 360 度ずらせて重ねると，赤の振幅は 2 倍に，緑の振幅は 1.4 倍に，青の振幅は 0 になり，赤が大きく浮かび上がる。

3 列目は，緑の波長で 360 度ずらせて重ねると，赤の振幅は 1.6 倍に，緑の振幅は 2 倍に，青の振幅は 1.6 倍になり，緑が大きく浮かび上がる。

4 列目は，青の波長で 360 度ずらせて重ねると，赤の振幅は 1 倍に，緑の振幅は 1.7 倍に，青の振幅は 2 倍になり，青が大きく浮かび上がる。

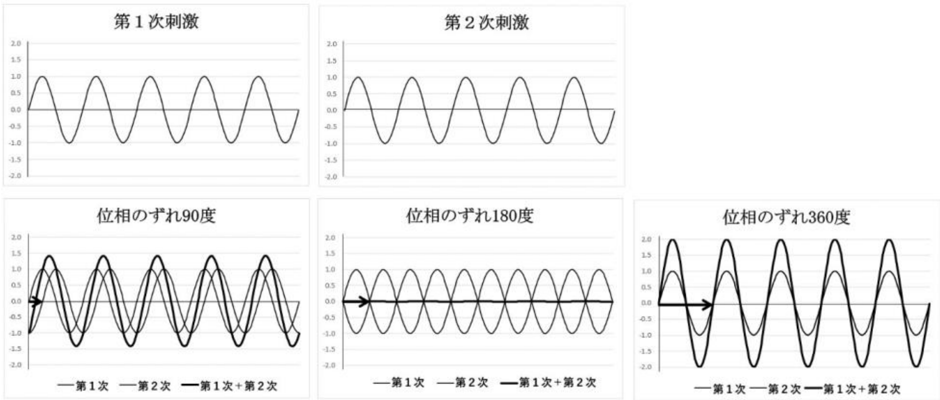


**図 6**　波の重ね合わせ

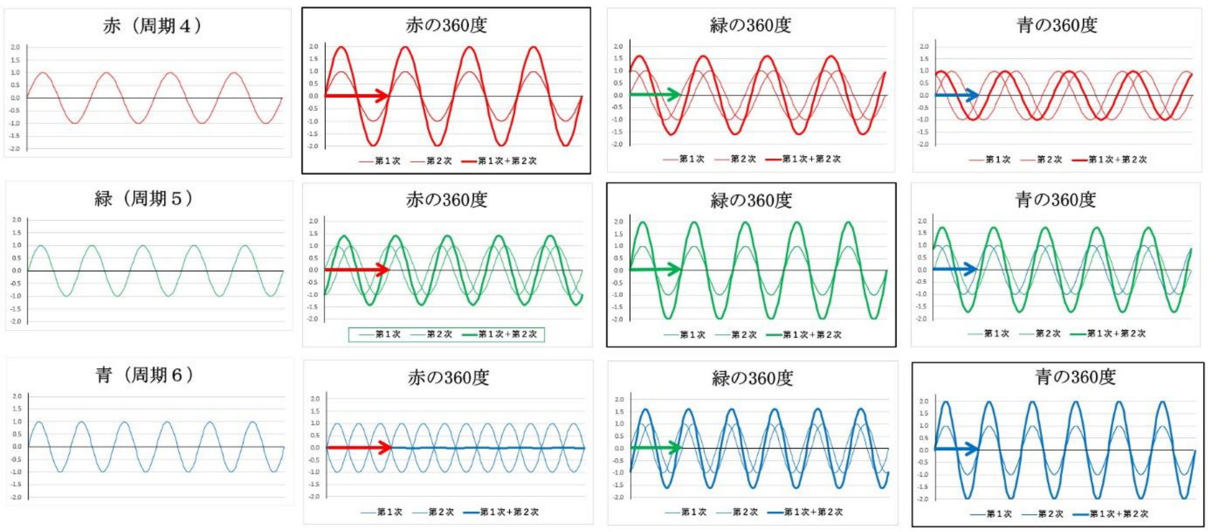


**図 7**　特定の色が浮かび上がる理由

この結果を使って主観色の色を推計することができる。色の三原色を RGB とすると，重ね合わせによる振幅の大きさは，**図 7** の列の方向（縦の方向）で，

(R, G, B) = (2, 1.4, 0)

(R, G, B) = (1.6, 2, 1.6)

(R, G, B) = (1, 1.7, 2)

である。これらを 0 から 255 の色度に計算しなおすと，

(R, G, B) = (255, 179, 0)

(R, G, B) = (204, 255, 204)

(R, G, B) = (128, 217, 255)

になる。この数値をもとに作図したのが**図 8** である。

最上段は，(R, G, B) = (255, 255, 255)で，三原色の加色混合により白（White）となる。2 段目は赤の波長だけ位相をずらした主観色，3 段目は緑の波長だけ位相をずらした主観色，4 段目は青の波長だけ位相をずらした主観色である。主観色は，赤，緑，青の鮮明な色ではなく，パステルカラーのような中間色となっている。

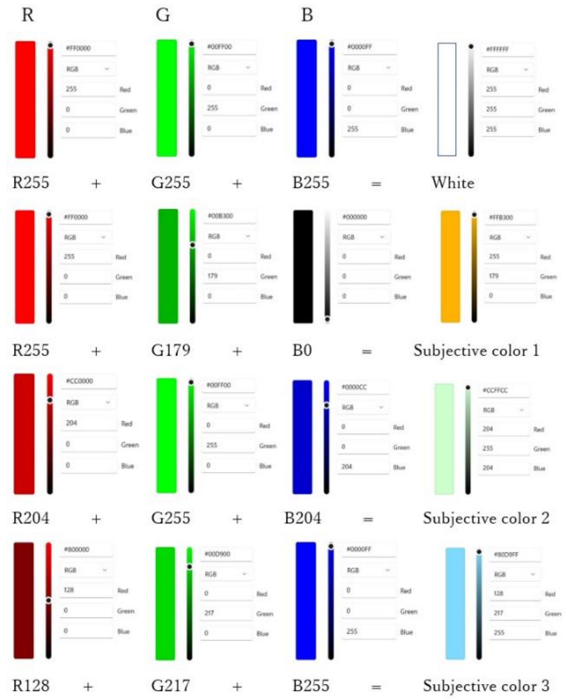


図 8　動的干渉モデルによる主観色の推計

**遅延の運動方程式**

**図 7** で特定の色が浮かび上がる仕組みを示したが，ベンハムのコマとの対応を考えてみよう。**図 4** で回転する円盤を直交座標に変換した。３本の円弧は３本の直線となったが，３本になっているのは主観色が現れやすくするための工夫であって，１本でも同じであり，それを簡略化すると**図 9** のようになる。

コマが回転すると，直交座標では左から右に進み，これが繰り返される。最初の白を第１次刺激，黒を挟んで二番目の白を第２次刺激と呼ぶことにする。第１次刺激がずれて，第２次刺激に重なるとき，動的な干渉が起こる。第１次刺激がずれる大きさを，１の赤がいちばん大きく，４の青がいちばん小さくすると，**図 7** で示した特定の色が浮かび上がる理由と符合する。そんな都合のよい仮説が成り立つのだろうか。

そこで私は大胆な仮説を立てた。第1次刺激の白を，光の量，伝達する物質，運動する物体と考え，質量$m\ (m_1, m_2, m_3, m_4)$，加速度$a\ (a_1, a_2, a_3, a_4)$を対応させる。

白の面積が大きければ光量が大きく質量は大きく，面積が小さければ光量が小さく質量は小さい。黒の部分は白色光を一切含まず，視覚系には何も伝えない。むしろ先行する白が視覚系に伝えた物理量の進行を停止または遅らせる働きをするのではないかと考えられる。

黒の長さはどれも同じなので力$F$（一定）とすると，これらには

$$F = ma = m_i a_i$$

の運動方程式が成り立つと考えられる。

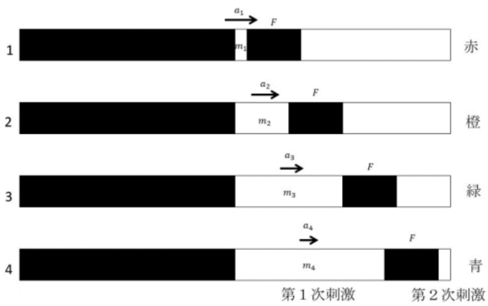


**図 9**　遅延の運動方程式（$F = ma$）

**図 9** より，質量$m$は，

$$m_1 < m_2 < m_3 < m_4$$

の関係がある。

運動方程式 $F = ma$ より，加速度$a$は, $F$（一定）なので,

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

となる。

「軽いものほど動かしやすく，重いものほど動かしにくい」というニュートンの運動方程式がベンハムのコマにおいても成り立つ。1の赤はつぎのように説明できる。第1次刺激の質量$m_1$はいちばん小さいので，加速度$a_1$はいちばん大きくなり，そのため第1次刺激はいちばん大きくずれて第2次刺激と重なり干渉する。**図 7** の2列目で示したように，いちばん長い波長の赤が大きく浮かび上がる。

## おわりに

プレボーが 1826 年に主観色を見つけてから 200 年近くになる。主観色が現れる白黒のパターンがいくつも考案されてきたが，その理由がわかっていない。私は思う。究極のところ，**図 10** に示す主観色の発現モデルに帰結するのではないだろうか。黒－白―黒－白の区間の長さを$a, b, c, d$とし，このパターンが毎秒 n 回繰り返されるとき，この5つの変数の値を変化させることで，さまざまな色が生成されるのではないだろうか。それにはベ

ンハムのコマのように円盤を回す必要もなく，画面上に黒—白—黒－白が映し出される実験装置があればよい。私の仮説が実証されれば，プレボー，フェフィナー，ベンハムと続く主観色の研究が大きく前進するに違いない[1)2)]。

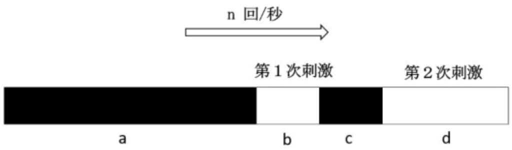


図 10　主観色の発現モデル

**参考文献**

1) Jozef Cohen, Donald A. Gordon, The Prevost-Fechner-Benham subjective colors, Psychological Bulletin, 46(2), 97-136, 1949.

2) Christoph von Campenhausen, Juergen Schramme, 100 Years of Benham's Top in Colour Science, Perception, 24(6). 695-717, 1995.

3) Yutaka Nishiyama, The Mathematics of Benham’s Top, Int. J. Pure and Appl. Math., Vol. 93, No. 3, 399-408, 2014.