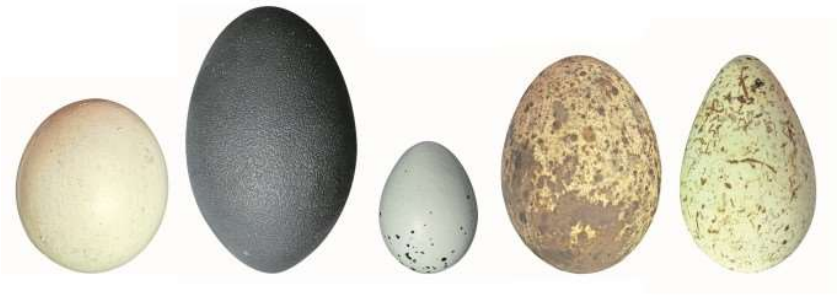
Frankfurter Allgemeine | 06.04.2023 - Aktualisiert: 09.04.2023, 09:35 Uhr
https://www.faz.net/-ijr-b725v

Eier-Morphologie

Die Vermessung des Eis

Vogeleier unterscheiden sich in Größe, Farbe und Musterung, aber oft auch in ihrer Geometrie. Über die Suche nach der universellen Eier-Formel.

Von ULF VON RAUCHHAUPT



© Klaus Rassinger und Gerhard Cammerer / Naturhistorische Sammlung Museum Wiesbaden
Eier der verschiedenen Grundformen (von links): ein annähernd sphärisches vom Habichtskauzes (Strix uralensis), ein elliptisches vom Emu (Dromaius novaehollandiae) je ein ovales von der Singdrossel (Turdus philome□los) und vom Fischadler (Pandion haliaetus) sowie ein pyriformes Ein einer Dickschnabellumme (Uria lomvia)

Am Palmsonntag führten wir Experimente mit Eiern durch: zwei Hühnereiern, einem rohen und einem hart gekochten, sowie Schokoladen-Ostereiern verschiedener Größe. Der Versuchsaufbau bestand aus einer um etwa fünf Grad geneigten Gartentischplatte. Diese ließen wir die Eier nun hinabrollen. Dabei ging es darum, zu überprüfen, was Yutaka Nishiyama von der Universität von Osaka 2012 im *Journal of Pure and Applied Mathematics* beschrieben hatte. Demnach würde das rohe Ei beim Rollen stets einer gekrümmten Bahn folgen, so lange, bis die Rotationsachse in Richtung der Neigung zeigt, sodass es nicht mehr weiterrollt.

Zu erklären sei das mit der Ei-typischen Asymmetrie entlang der Hauptachse, deren Mittelpunkt dadurch nicht mit dem Schwerpunkt übereinstimmt, schreibt Nishiyama, der diese charakteristische Eiergeometrie evolutionsbiologisch deutet: Sie verhindere gegebenenfalls, dass dem Vogel sein ungeschlüpfter Nachwuchs zu weit davonrollt. Zwar legen unter den 10.980 rezenten Vogelarten einige auch annähernd elliptische oder sogar fast sphärische Eier. Doch umgekehrt gibt es auch sogenannte pyriforme Eier – von lateinisch pirum, die Birne – mit einem ausgeprägteren „spitzen“ Ende, das sie besonders effektiv vor dem Wegrollen bewahrt. „Pyriforme Eier sind häufig bei Seevögeln“, schreibt Nishiyama. Denn diese brüteten oft auf engen Felssimsen, wo ein rasch greifender Wegrollschutz

besonders wichtig ist. Doch die meisten Vogeleier sind eben oval, von lateinisch ovum, das Ei.

Es gibt also insgesamt vier Grundformen von Eiern, die man aufgrund der Rotationssymmetrie nach ihren Umrissen klassifizieren kann: kreisförmig, elliptisch, oval und pyriform. Insofern die ersten beiden mit einfachen mathematischen Formeln beschrieben werden können und der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist, kann man sich fragen, ob es nicht eine allgemeine Eier-Formel gibt. Erst vor zwei Jahren hat der ukrainische Agraringenieur Valeriy Narushin vom Umweltforschungsinstitut in Saporischschja zusammen mit zwei britischen Kollegen tatsächlich eine solche gefunden und in den *Annals of the New York Academy of Sciences* veröffentlicht.

© Rassinger, Cammerer / Museum Wie
Pyriformes Ei einer Dickschnabellumme (Uria lomvia)

Die Innovation Narushins und seiner Kollegen liegt in der Modellierung pyriformer Kurven. Doch schon die mathematische Beschreibung eines nicht elliptischen Ovals ist nicht einfach und auch uneindeutig. Ein Kreis dagegen ist immer die Menge der Orte, die von einem Punkt gleich weit entfernt sind. In einem kartesischen Koordinatensystem ergibt sich damit eine Kurve mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ mit r als dem Radius des Kreises. Auch eine Ellipse ist mathematisch etwas Eindeutiges: Die Menge aller Punkte, für welche die Summe der Abständen d1 und d2 zu zwei gegebenen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist: d1 + d2 = const. Das führt dann auf eine Gleichung der Form $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Sind a und b gleich, fallen die Brennpunkte zusammen, und man erhält einen Kreis.

Wie aber bekommt man ein Oval? Tatsächlich gibt es mehrere ganz verschiedene Möglichkeiten, eine geschlossene, glatte, überall konvexe Linie zu erzeugen, die um eine Achse symmetrisch ist, senkrecht dazu aber nicht. So kann man erstens Kreisbögen verschiedener Radien aneinanderstückeln. Damit ein glattes Ei dabei herauskommt, müssen an den Verbindungsstellen die Tangenten der dort verbundenen Bögen zusammenfallen. Auf diese Weise erhält man sogenannte euklidische Eier, die sich allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Im einfachsten Fall reichen drei Kreisbögen, von denen einer das „stumpfe“ Ende des Eis darstellt.

An Ostern 1605 eierte Johannes Kepler herum

Eine eiförmige Linie anderer Art erwog der Astronom Johannes Kepler um die Ostertage des Jahres 1605 für die Form der Bahn des Planeten Mars, nachdem er durch sorgfältige

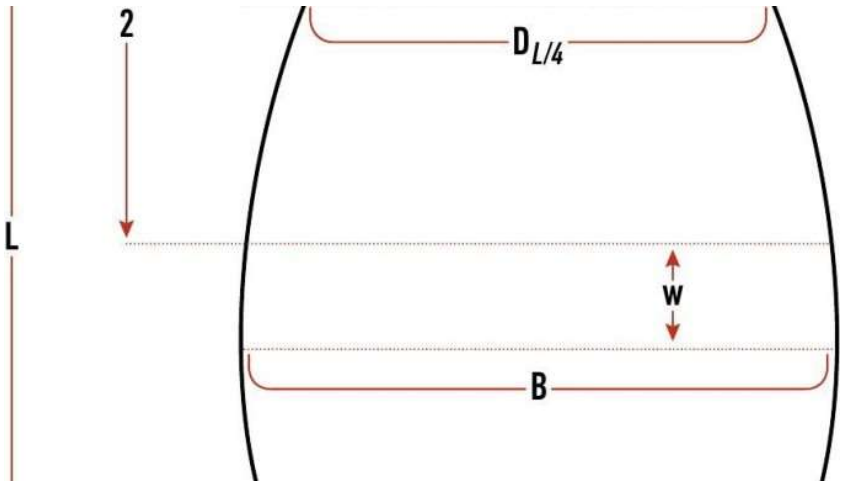
Auswertung der Beobachtungen seines verstorbenen Fachkollegen Tycho Brahe festgestellt hatte, dass der Mars nicht auf einer Kreisbahn lief – wie nicht nur die antiken Astronomen angenommen hatten, sondern auch Kopernikus, Galilei und Brahe selbst.

Wie der Berliner Wissenschaftshistoriker Gerd Graßhoff in einer Rekonstruktion der keplerschen Überlegung zeigte, nahm der kaiserliche Hofmathematiker nicht einfach die Ellipse an, für die er heute berühmt ist. Ihm ging es darum, die physikalischen Kräfte so zu modellieren, dass es zu den Beobachtungen passte – und das in seinen Augen einfachste Modell dafür führte zunächst auf ein Oval. Zu Keplers großer Enttäuschung passte jedoch auch die Eierbahn nicht zu den Beobachtungen. Erst danach kam er auf die mathematisch einfachere Ellipse. Den wahren physikalischen Grund für die Ellipsenform der Planetenbahnen konnte erst Isaac Newton rund 80 Jahre später aufklären.

Ovales von Cassini und Descartes

Die exakte geometrische Gleichung seiner ovalen Bahn sei für Kepler damals von untergeordneter Bedeutung gewesen, sagt Gerd Graßhoff. Aber wie könnte eine solche Gleichung lauten? Der Astronom Giovanni Domenico Cassini stieß 1680 auf eine Kurve, die sich ergibt, wenn man nicht die Summe der Entfernungen zu zwei gegebenen Punkten konstant hält, wie bei der Ellipse, sondern das Produkt. Für bestimmte Werte des Produkts und des Abstandes dieser Punkte besteht die Cassini-Kurve aus zwei Eiern, deren Spitzen zueinander weisen. Ein solches Cassini-Ei wird aber nicht durch geeignete Wahl der Parameter zu einer echten Ellipse, höchstens zu einem Kreis. Tatsächlich hat man es hier mit zwei unterschiedlichen Gebilden zu tun: Ellipsen sind Kegelschnitte, das heißt, sie ergeben sich als Schnittlinien, wenn man Ebenen unter hinreichend kleinen Winkeln durch einen Kegel legt. Die Cassini-Kurven dagegen ergeben sich durch den Schnitt einer senkrechten Ebene durch einen sogenannten Torus, also ein donutförmiges Gebilde.

Doch man kann auch von der Ellipse ausgehen und sie zum Ei verallgemeinern. Die simpelste Vorschrift dazu fand 1637 der Philosoph und Mathematiker René Descartes, indem er die Summanden in der Definition der Ellipse verschieden gewichtete, also $m \cdot d1 + n \cdot d2 = const$ mit zwei positiven reellen Zahlen m und n. Für m = n erhält man wieder eine Ellipse, andernfalls ergibt sich für bestimmte Werte von n und m eine eierförmige Kurve, das kartesische Oval.



© Grafik F.A.Z. Grafik Piron

Die Modellparameter L, B, w und DL/4 legen die allgemeine Geometrie der Oberfläche eines Vogeleis fest.

Nun kann man aber auch die Ellipsengleichung $y^2/b^2 + x^2/a^2 = 1$ modifizieren, indem man einen der beiden quadratischen Terme, etwa den mit dem x, durch eine komplizierte Funktion ersetzt, etwa $y^2/B^2 = (L^2 - 4x^2)/(4 \cdot (L^2 + 8w \cdot x + 4w^2))$. Das beschreibt ein Ei der Länge L und des größten Durchmessers B, der um eine Distanz w von der halben Länge entfernt ist (siehe Abbildung). Für w = 0 ergibt sich eine Ellipse mit den Halbachsen L/2 und B/2. Diese Eierformel geht auf einen deutschen Ingenieur namens Fritz Hügelschäffer zurück. Sie tauchte in den 1940er-Jahren im Flugzeugbau auf und wurde von Valeriy Narushin als eine besonders gute Beschreibung für die Form von Hühnereiern identifiziert. Damit wurde das Hügelschäffer-Ei zum Ausgangspunkt seiner Bemühungen um eine universale Gleichung zur Beschreibung aller Vogeleierformen.

Die elliptischen und damit auch die sphärischen Eier sind in der Hügelschäffer-Formel enthalten. Doch die pyriformen sind es nicht. Ein Hügelschäffer-Ei lässt sich nämlich nicht beliebig zuspitzen. Wie Narushin und Kollegen zeigen, wird es mit wachsendem w nicht nur spitzer, sondern zugleich am anderen Ende platter, bis es eher einem Zuckerhut ähnelt als einem Ei. Es war daher nötig, einen weiteren Parameter einzuführen, nämlich den Durchmesser des Eis auf einem Viertel seiner Länge, von der Spitze aus gemessen. Damit, so die Autoren, lassen sich sämtliche Vogeleier aller vier Grundtypen und die Übergangsformen dazwischen modellieren. Die Gleichung dazu ist allerdings nicht mehr ganz so einfach. So sieht sie aus:

$$= \pm \frac{B}{2} \sqrt{\frac{L^2 - 4x^2}{L^2 + 8wx + 4w^2}} \cdot$$

$$1 - \frac{\sqrt{5{,}5L^2 + 11Lw + 4w^2} \cdot \left(\sqrt{3}BL - 2D_{L/4}\sqrt{L^2 + 2wL + 4w^2}\right)}{\sqrt{3}BL\left(\sqrt{5{,}5L^2 + 11Lw + 4w^2} - 2\sqrt{L^2 + 2wL + 4w^2}\right)}$$

$$1 - \sqrt{\frac{L\left(L^2 + 8wx + 4w^2\right)}{2(L - 2w)x^2 + \left(L^2 + 8Lw - 4w^2\right)x + 2Lw^2 + L^2w + L^3}}\Bigg)$$

© Narushin, Romanov & Griffin, Ann. N.Y. Acad, Sci (2021)
Die große vereinheitlichte Theorie der Oomorphologie: Die Gleichung beschreibt den Umriss aller Typen von Vogeleiern als Kurve in kartesischen Koordinaten y und x.

Ist das also die Idee des Eis? Das Wesen dessen, was der Ornithologe Tim Birkhead „Das perfekteste Ding“ nannte? Die Enttäuschung, dass es nicht eleganter geht – wenn es denn nicht eleganter geht –, könnte sich am ehesten bei Physikern einstellen. Die sind ja seit Keplers und Newtons Zeiten gewöhnt, dass die Natur auf fundamentaler Ebene wieder einfach wird, zumal dann, wenn ihre mathematischen Beschreibungen nicht nur als Erkenntniswerkzeuge für einen Zugang zur Realität gesehen werden, sondern als die Realität selbst. Nun sollte man seine philosophischen Grundüberzeugungen sicherlich nicht nur an Vogeleiern orientieren, aber sie sind vielleicht eine Erinnerung daran, dass es zuweilen auch anders laufen kann als damals bei Kepler und mächtigere Modelle die komplizierteren sind.

Sicher ist ohnehin, dass an Eiformen interessierte Gewerbezweige nicht auf die universale Eierformel gewartet haben. So sind die Juweleneier, die Peter Carl Fabergé für den Zarenhof

anfertigte, offenbar auch in ihren zugrunde gelegten Geometrien sehr individuell. Zu diesen Schöpfungen angeregt wurde Fabergé möglicherweise in Dresden von dem Goldenen Ei, das August der Starke 1705 erwarb. Es gilt als frühestes Stück seiner Art und ist heute im Dresdener Grünen Gewölbe zu sehen. Wo und von wem es hergestellt wurde, ist nicht überliefert, und so weiß man auch nicht, ob seiner Form zum Beispiel ein euklidisches Ei zugrunde liegt oder es von einem Natur-Ei abgepaust wurde. Die Goldschmiede dürften das Problem aber eher nicht mathematisch-konstruktiv, sondern praktisch-technisch gelöst haben, vermutet eine Mitarbeiterin des Grünen Gewölbes auf Nachfrage.

Und in der Süßwarenindustrie weiß man ebenfalls kein besonderes Verfahren zur Erzeugung der österlichen Geometrie zu nennen. „Unsere Schokoladeneier-Formen sind rotationssymmetrische Körper auf der Grundlage einer Kurve, deren Form beziehungsweise Ästhetik der Kunde entscheidet“, erklärt Christoph Schwaiger von der Hans Brunner GmbH in Glonn, die für die Schokoladenfirmen die Gussformen anfertigt. Zudem gibt es noch technische Randbedingungen zu berücksichtigen. So sollten die Hohlräume in Ober- und Unterteil einer Form zwecks besserer Entformbarkeit einen Winkel von mindestens drei Grad einschließen.

Was uns zu den palmsonntäglichen Experimenten zurückbringt. Tatsächlich ließen sich Nishiyamas Ergebnisse reproduzieren, und zwar nicht nur für den evolutionsbiologisch relevanten Fall des rohen Eis. Auch das gekochte rollte auf einem Kreisbogen, wenn der Krümmungsradius auch deutlich größer war. Wir erklärten uns den Unterschied mit dem im Eiweiß beweglichen Dotter des rohen Eis, was Valeriy Narushin bestätigt. „Das Innere eines frischen Vogeleis ist ein System mit extremer Unwucht“, erklärt er. „Seine Rotationseigenschaften sind daher ganz andere.“

Schließlich die Schokoladeneier. Ihre Bahnen waren sehr viel stärker gekrümmt, was auf die sie einhüllende knitterige Folie zurückzuführen sein könnte, die deutlich mehr Rollenergie aufnimmt als die Reibung zwischen Tisch und Eierschale. Die Überprüfung dieser Hypothese wurde allerdings vertagt, denn ausgewickelt werden konnten die Schokoeier nicht. Es war schließlich noch nicht Ostern.

Quelle: F.A.S.

© Frankfurter Allgemeine Zeitung GmbH 2001–2023
Alle Rechte vorbehalten.