

1/998001=

西山豊

1を998001で割ると、驚くべき結果になる。こんなメールがインターネットを飛び交ったのは2012年の年初のことである。私は、イギリスの知人からのメールで知ったので、この話題はおそらく世界中を駆けめぐっていることだろう。1を998001で割ると、小数点以下が3桁の数で000から999まで順番に並ぶ。ただし998だけは除くという。そして、その計算結果の画像がインターネットに出回った。

1/998001=0.000001002003004005006007008009010
011012013014015016017018019020021022023024025
026027.....995996997999...

長年、数学と関係していると、少々のことには感動しないが、この画像を見て、おやっと思わざるを得なかった。数学が嫌いな人、苦手な人でも、この美しい数字の列に驚くことだろう。998だけが抜けるのは惜しい。998も入れればよいのにと残念がるだろう。一方、数学愛好家は、この数字が並ぶ理由を知りたがる。この問題は高校数学の知識で説明できるので、皆さんも考えてみてはどうだろうか。

まず、この計算結果が正しいことをどのようにして確認するのか。紙と鉛筆で、 $1 \div 998001$ を行ってもよいが、除数が6桁の数であり、小数点以下が約3000桁も計算しなければならないので、かなりの時間がかかる。電卓を使う方法もあるが、電卓の有効桁はたかだか14桁程度であり、これでは歯が立たない。手頃なのは、表計算ソフトを使う方法であろう。まず1を1000000倍(=10⁶)して、これを998001で割ると、商が1で余りが1999となる。余り1999を1000000倍して、これを998001で割ると商が2003で余りが3997となる。このような操作

を繰り返し、商を順番に並べると、0.000001002003...となっていく。このような方法では小数点以下が3000桁でも楽に計算できることになり、冒頭の計算結果が正しいことが確認できる。また、これと同じ方法で計算してくれるインターネットのサイトもある。

999の次はどうなっているのか。次は000である。000から999(998を除く)の循環節が繰り返される。000から999までは規則的な循環節であり、これ自体が循環するので、循環小数である(循環節をもつ循環小数)。では、なぜこのように規則的に並ぶのだろうか。どうして998だけが除かれるのだろうか。それを解くカギは、998001という数が

$$998001 = 999^2$$

であることに気付くと、ほとんど解けたことになる。1を998001で割るということは、1/999に1/999を掛けたことになる。では1/999はどのような数であるのか。

$$1/999 = 0.001001001001001001001\dots$$

上のような循環小数となる。右辺から左辺を導く方法は、高校数学では馴染みの初項1/1000、項比1/1000の等比級数としてあらわされる。

また、掛け算(0.001001001...×0.001001001...)は、足し算(0.001001001...+0.000001001001...)となり、計算はそれほど難しくはない。1を位ごとに合計すると

$$997, 998, 999, 1000, 1001$$

と続く。1000, 1001が3桁では桁上がりとなり、999に1が足される。999も1が足されるので桁上がりとなる。ところが998は1が足されても999で桁上がりとならない。

$$997, 999, 000, 001, 002$$

このようにして、998が無いのである。1/998001の理由を考えるのは、暇つぶしにちょうど良い。

(にしやまゆたか/大阪経済大学)