

談話室

不思議な数 6174

西山 豊

1 4桁の数の引き算

ほとんどの人にとって数学に対するよい思い出はない。受験が終われば忘れてしまいたいという存在だ。私は、逆に数学が好きだったので、数学の教育や研究を職業してきた。こんなにおもしろい学問はないと思うのだが、その一つをここで紹介したい。

6174は実に不思議な数である。どんな数であるかを説明する前に、簡単な計算をしていただこう。まず4桁の数を一つ決める。その場合、1111や2222などのように各桁がすべて同じものは除くことにする。

例えれば、今年の年2016としよう。4桁の数を構成する4個の数字を並べ変えて一番大きい数と、一番小さい数を作る。4桁にならない場合は左側に0を埋めて4桁にする。2016の場合は6210と0126である。そこで、この最大数と最小数の差をとると、

$$6210 - 0126 = 6084$$

になる。このような操作をカプレーカー操作という。名前の由来はこの数を発見したインドの数学学者、D.R.カプレーカー(1949年)による。新しくできた数6084に対してこの操作を繰り返すと、

$$8640 - 0468 = 8172$$

$$8721 - 1278 = 7443$$

$$7443 - 3447 = 3996$$

$$9963 - 3699 = 6264$$

$$6642 - 2466 = 4176$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

になる。

数が6174に到達すると、この数が繰り返される。つまり6174で循環するのだ。そこで、この数を不動数と呼ぶことにする。どんな数

から始めてよい。必ず6174の不動数に到達するのである。疑うなら別の数でやってみよう。1789は次のようになる。

$$9871 - 1789 = 8082, 8820 - 0288 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

2016はカプレーカー操作を7回で、1789は3回で6174に到達した。この現象はすべての4桁の数に対して成り立つのだ。

児童に課す算数の計算ドリルも、無味乾燥な計算ばかりをやらせるのではなく、このような不思議を体験させることも大切ではないだろうか。

2 6174に到達する回数と経路

6174の不思議な現象を体験すると、すべての4桁の数がそうなるのか確かめてみたくなるものだ。それには50行ほどの簡単なプログラムを作成すれば、この事実を確認できる。パソコンの得意な読者は確かめられたい。

また、何回のカプレーカー操作(最大数から最小数を引く)で6174に到達するかの度数分布を作成することができる。到達回数の最大は7回があるので、7回でも6174に到達しなければ途中のどこかで計算を間違っているのである。計算ミスを知ることで、自分がどういう引き算に弱いかを知ることになる。

では、なぜ4桁のすべての数が6174に到達するのだろうか。それは、一般に次のように説明されている。4桁の数をabcd(ただし $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$)とすると、最大数は $1000a + 100b + 10c + d$ であり、最小数は $1000d + 100c + 10b + a$ となる。最大数から最小数を引くと、

$$999(a-d) + 90(b-c)$$

となる。さて、 $(a-d)$ は1と9の間の値をとり、 $(b-c)$ は0と9の間の値をとるから、上記の形の数は全部で90個となり、それらの数を表計算ソフトで表示することができる。そして、この90個の数から作られる最大数は図で示される30個だけになる。こ

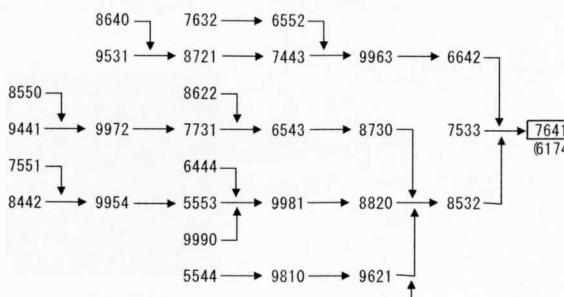


図 7641(6174)への系統図

こからが不思議なことだが、この30個の数はすべて6174に到達するのである。その系統図で示しておく。

以上より、すべての4桁の自然数が6174に、最大7回で到達することがわかる。でも、なぜ6174に到達するのか本当の理由はわかっていない。

3 4桁以外の数はどうなるか

6174に到達するという現象は、4桁以外の数でも起こるのだろうか。実は、3桁の数についても確認されていて、すべての3桁の数はカプレーカー操作(最大から最小を引く)により495に到達する。読者はこのことを確かめてください。

4桁の数が6174に、3桁の数が495に到達するのだから他の桁の数も同じことが起こるのではないかと期待するであろうが、残念ながらこのような現象が起こるのは4桁と3桁の数についてだけしか確認されていない。

2桁の数については循環をする。5桁の数については、三つの循環グループのどれかに入ることが知られている。6桁あるいはそれ以上の数については、不動数の存在は確認されているが、すべての数がその不動数に到達するということはない。

4 6174は世界を駆け巡る

私は、2005年度にイギリスのケンブリッ

ジ大学に留学する機会があった。ミレニアム数学プロジェクトのオンライン・マガジンPlusに拙稿「6174の不思議」を英訳して投稿したところ、Mysterious Number 6174というタイトルで掲載された^{1,2)}。この記事には予期せぬ反響があった。

イギリスから帰国後のことPlus編集部から、あなたの記事が世界中で読まれているとメールが届く。数学フォーラムやブログに記事が紹介され、Plusのホームページを訪問するカウントが急上昇しているという。本当にと思って調べてみると、英語だけでなくスペイン語、フランス語、ドイツ語、ハンガリー語などヨーロッパ言語に翻訳されていた。

数ヵ月たって調べてみると、中国語、韓国語、ベトナム語、タイ語、アラビア語などアジア・アフリカの母国語にも翻訳されていた。そして、日本語にまで翻訳されていたので驚いた。英語が公用語であり、記事や論文を英語に翻訳しておくことの重要性を改めて知られた。

同時に世界中の読者からメールが届いた。イタリア人からもらったメールには、「すべての道はローマに通じる。すべての数は6174に通ずる」とあった。子どもだけでなく若者の数学嫌いや理科離れが問題にされるが、それをなくす方策は、私たち科学者が、このような魅力ある教材を開発することではないだろうか。

引用資料

- 1) 西山豊「6174の不思議」『理系への数学』現代数学社, 39(1), 9-12, (2006).
 - 2) Nishiyama, Y. Mysterious Number 6174, Plus, Cambridge, 38, (Mar 2006). <https://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama/index>
- (最終閲覧日: 2016年7月4日)

(にしやま・ゆたか:大阪経済大学、情報数学)