

## 科学余話

## 卵形考

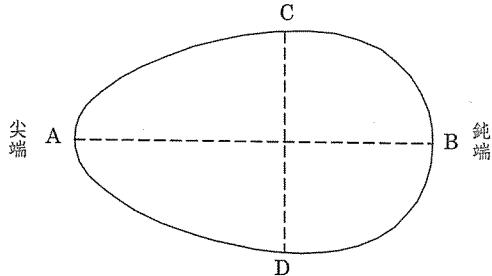
西山 豊

## 1 卵は斜面で止まる

生物学は今では分子生物学が主流であるが、形や数に注目してみると数学としての要素が多く含まれている。今回は卵形の不思議について説明しよう。この話題は1979年の『数学セミナー』に発表したもので、ずいぶん前のことであるが読み返してみても新鮮で不思議に思う<sup>1)</sup>。この論文は英語にも翻訳しているので<sup>2)</sup>、海外のサイトから多くの引用がある。また、テレビ番組で取り上げられ、国際放送されることもあった<sup>3)</sup>。

食材に使う卵の形について、皆さんは不思議に思われたことはないだろうか。卵の形を卵形と書き「たまごがた」または「らんけい」というが、なぜか。まるで禅問答のような問い合わせをしたが、その秘密を少しづつ解き明かしていくこう。数学では丸い図形の代表的なものは円である。円は中心と半径があれば決まる。高校になれば橢円というものを学び、橢円は円を横に長くしたもので、2つの焦点（あるいは定点）からの距離の和が一定の曲線である。

卵は円でも橢円でもない。卵は卵形をしている。卵をよく観察すると、中心からの距離が一定の円ではなく、横のほうが長く橢円のような形をしている。さらによく観察すると、横方向でも一方は丸くなっているが、もう一方は尖っている（図1）。これが卵形である。軸が長い方を長軸、短い方を短軸といい、丸い方を鈍端、尖った方を尖端という。卵は、実際は3次元の物体であるから、円や橢円ではなく球や橢円体で表現しなければならないが、断面で考えても十分であるので、ここ



AB：長軸 CD：短軸

図1 卵の形

では平面図形で説明する。

卵がなぜこのような形になったのかを考えてみよう。卵を机の上に置いてみると、長軸は机の面と平行ではない。尖ったほうが机の面に近く、丸いほうが机の面から遠い状態で静止する（図2）。橢円の場合は長軸と机の面は平行である。卵がどうして長軸を傾けて静止するかは、卵の重心の位置を考えれば理解できる。円や橢円の場合は重心の位置は上下、左右両端から等距離のど真ん中にあるが、卵の場合は一方が尖っていて一方が丸くなっているから、重心の位置は丸いほうに少しだけずれている。重心が真ん中からずれた卵を机の上に置くとどうなるか。図2に示すように、卵の重心Oからの重力Wと接点Pからの垂直抗力Nが同じ直線上にあり、長軸が傾いて静止するのである。物理学の用語で説明したが、このように卵が傾くことは誰でも知っていることである。

卵の長軸が傾くとどうなるか。それは斜面に卵を置いてみると、どのような位置に置いても卵は転がってしまわざにいる状態で静止するのである。これが不思議である。静止の状態は、卵の尖った

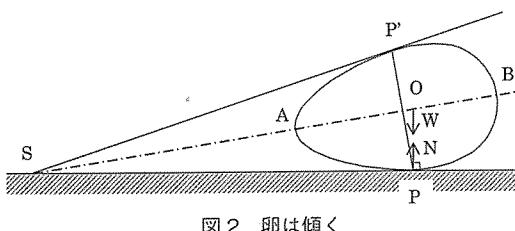


図2 卵は傾く

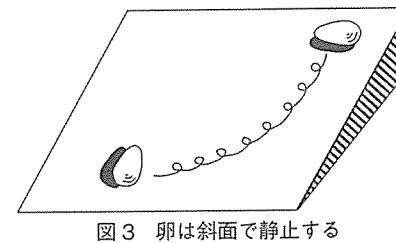


図3 卵は斜面で静止する

ほうが斜面の上に向き、丸いほうが斜面の下に向くのである（図3）。卵の形に今まで関心のなかつた読者はまずこれを実験で確かめて欲しい。机の角度はわずかに5度未満に傾け、卵を手放すときはそっと慎重にしなければならない。さらに机の面がつるつると止まらないことがある。ある程度の摩擦抵抗が必要だ。

卵が斜面で転がっても静止することは、紙製のコップでも同じことが確かめられる。紙製のコップは普通、飲み口の円が大きく、底の円が小さい。手に持つ側面の部分を延長していくと円錐になる。卵も紙製コップも円錐で近似（外挿）できる。そこで卵や、紙コップを斜面で転がす問題は、円錐を斜面で転がす問題に置きかえることができる。円錐がなぜ斜面で静止するかを考えるのは、それほど難しくはない（図4）。

また、斜面でなく水平な面でも卵や紙コップは遠くへ転がらないという特性がある。親鳥が雛をかえすために卵を抱いているとき、卵が転がり

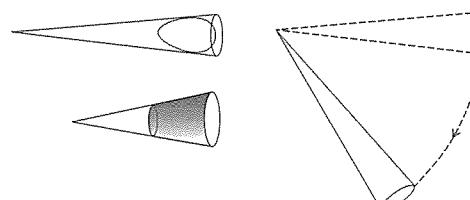


図4 卵や紙コップは円錐で近似できる

出たとしよう。親鳥は卵をとり戻すために動くことが出来ない。円錐が円弧を描いて元の位置に戻るように、卵は円弧を描いて親鳥の元に戻ってくる。

## 2 デカルトとカッシーニの卵形線

**卵形線**を描く方法にはデカルトとカッシーニの方法がある。デカルトはつぎのようにして卵形線を定義した（Descartes, 1637年）。基準となる円が2つある。中心 $O_1$ で半径 $r_1$ の円と、 $x$ 軸方向に $a$ だけ離れた中心 $O_2$ で半径 $r_2$ の円である。それぞれの中心を通る平行線を2本描き、相手の円との交点を $B, A$ とする（この場合 $O_1B$ と $O_2A$ が平行）。直線 $O_1A$ と直線 $O_2B$ の交点 $P$ が卵形線の座標である。 $m, n > 0$ とすると、 $m\overline{O_1P}+n\overline{O_2P}$ =一定の関係がある。 $m=n$ のときは橢円となり、基準円の半径が等しくなる（ $r_1=r_2$ ）。図5は、Visual Basicプログラムによって描いたもので値を $a=1, r_1=1.2, r_2=1.8$ とした。確かに卵の形をしている。

卵形線を描くもうひとつの方法にカッシーニの方法がある。カッシーニはつぎのように卵形線を定義した（Cassini, 1680年）。2つの定点（あるいは焦点） $A, B$ からの距離の積が一定である点 $X$ の軌跡は卵形線を描く（図6）。 $A, B$ の中点 $O$ を原点とし、 $A, B$ を結ぶ直線を $x$ 軸とする直交軸に関するその方程式は

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = k^4 - a^4$$

となる。ただし $\overline{AB}=2a, k^2=\overline{AX}\times\overline{BX}$ 。

特に $a^2=k^2$ ならば、 $O$ は曲線の結節点と

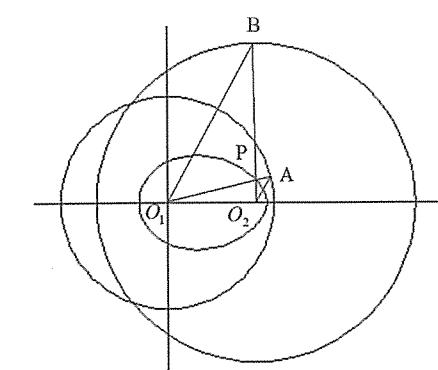


図5 デカルトの卵形線

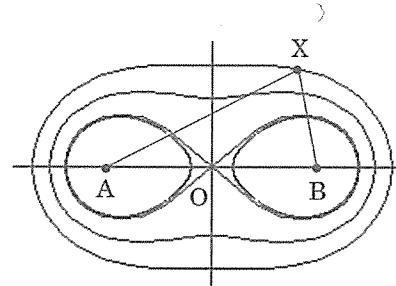


図6 カッシーニの卵形線

なる。この場合、この曲線をレムニスケート（Lemniscate）という。カッシーニの卵形線は陰関数で表示されるのでこのままでは作図できない。この関数に $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ を代入すれば、つぎの極座標による方程式になる。

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{a^4 \cos^2 2\theta + k^4 - a^4}$$

前者の方程式から卵形線を描くには等高線を描くソフトを使う。後者の方程式からはVisual Basicプログラムで比較的簡単に作図できる。

橢円の場合は2定点からの距離の和が一定であるが、カッシーニの卵形線は距離の積が一定である。 $k$ のパラメータを変えて卵形線を描いてみた。図6は $a=1$ に対して $k=1.4, 1.2, 1, 0.98$ のときの図である。 $k>a$ のときが外側の曲線で橢円的卵形であり、 $k$ が小さくなるにつれて $x=0$ のあたりで細くなり、 $k=a$ のときが原点 $O$ で交差するレムニスケート曲線となる。 $k<a$ のとき曲線は2つにわかれ卵形となる。一番内側の曲線は、ここで議論している卵の形をしている。

## 3 卵の形もいろいろ

生物学上は、卵は卵細胞をいうが、普通はそのうち体外に産み出されたものをいう。細胞質中に栄養物質である卵黄を含み、そのまわりは卵白などさまざまな物質で覆われる。卵の大きさはジンベイザメで $68\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ 、ダチョウで $16\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ 、ハチドリの一種では $1.2\text{ cm} \times 0.8\text{ cm}$ などである。私は2005年度にケンブリッジに留学する機会を得た。休日を利用してロンドンの自然史博物館を訪れたとき卵の展示があり、これらを見ることが出来た。

卵の形に注目して分類してみると卵形、洋梨形、

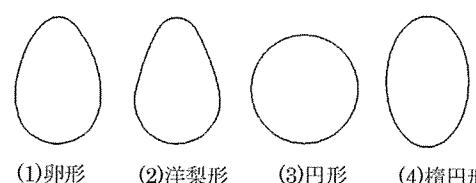


図7 形の分類（『鳥類の図鑑』（小学館）P.158より）

円形、橢円形の4つに分かれる（図7）。

卵形の代表はニワトリの卵である。洋梨形はウミガラスやウミスズメなど海鳥に多く、卵形より尖端と鈍端の差が大きい。円形はウミガメ、橢円形はダチョウに代表される。

ニワトリは今では平坦な場所に卵を産むので転がって割れる心配をしなくてよいのだが、卵形になっている。親鳥が卵をだいて暖めるとき、転がって遠くに行かず円弧を描いて戻ってくるために卵形なのだろうか。ウミガメは砂浜に卵を産み、ダチョウは草原に卵を産み、どちらも平坦な場所なので転がる心配をしなくてすむので円形や橢円形であることが理解できる。ウミガラスやウミスズメは狭い岩棚に卵を産む。岩棚は傾斜していることが多いので、洋梨形である理由もうなづける。海鳥でもカモメやカツオドリはこの形をしていなかったため、転がる心配があるので巣をつくっている。このように考えてみると、なるほど卵が卵形である理由も理解できるのである。

## 4 ダーウィンの進化論

卵はどの時点で卵形になったのだろうか。卵の形は最初から決まっていたのか、それとも後から決まったのだろうか。

ダーウィンの進化論がある。自然淘汰説または自然選択説ともいう。進化の要因論としてダーウィンとウォーレスが同時平行的に到達した説で、生物は原則として多産性で、そのために起こる生存競争の結果、環境により適応した変異個体が生存し、その変異を子孫に伝える。このため生物は次第に環境に適応した方向に向かって進化するという考え方である。ダーウィンはこの説を『種の起源』において本格的に論じ、それによって進化論

は広く認知された。

卵の形はつぎに示すように、ダーウィンの進化論を裏付ける材料のように思える。ここに卵の構造を示す(図8)。卵は卵のからである卵殻、卵を割ると通称しろみの卵白、通称きみの卵黄、卵黄を固定するカラザ、鳥のからだのもとになる胚盤、気室、卵殻膜などで構成される。意外なことに、ニワトリの卵殻は確かに卵形をしているが、卵を割って中の卵黄をとってみると球形に近いことである。卵黄は、球である。重力の影響を受けるためわずかに歪むが基本は球である。

皆さん、鶏肉店の店頭にときおり「玉ヒモ」

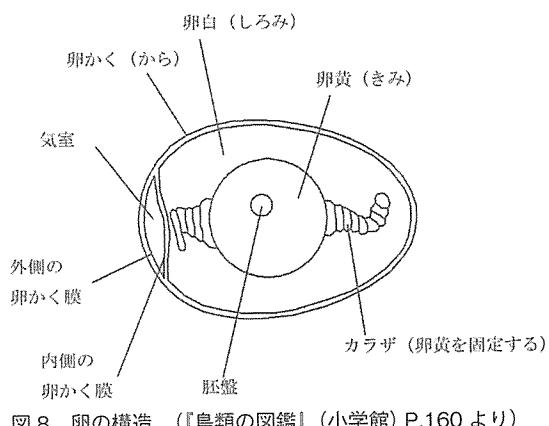


図8 卵の構造 (『鳥類の図鑑』(小学館) P.160 より)

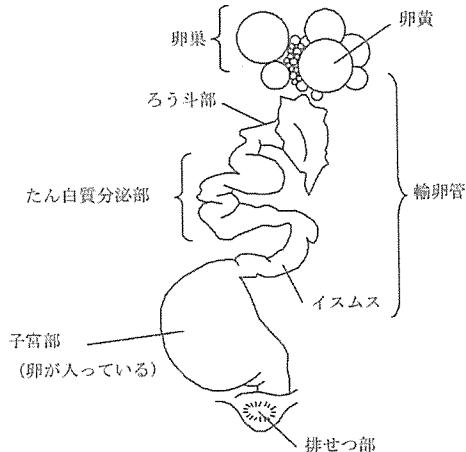


図9 卵巣と輸卵管 (斎藤昌蔵『にわとりと卵』  
(同和春秋社) より)

として売られている、ニワトリの卵巣と輸卵管をご存知であろうか(図9)。「玉ヒモ」の玉はニワトリの卵巣であり、ヒモはニワトリの輸卵管である。卵を産まなくなつたニワトリを鶏肉にするとともに、臓物である玉ヒモも昔は栄養があるといつて結構、重宝にされた。ニワトリは1日に1個の卵を産むが、これから産もうとする卵の生成過程を一度に見ることができる。

卵巣にはぶどうの房のように多くの小さな卵黄があるが、どれも球に近い形をしている。十分に大きくなつた卵黄はろう斗部から輸卵管に入り、たんぱく質の分泌を受けながら卵白と卵殻膜(いわゆる「うす皮」)を形成していく。子宮部では石灰質の沈着により卵殻(から)が形成される。ろう斗部から輸卵管を経て放卵されるまでの時間は約24~27時間であり、輸卵管の全長は70~75cmである。

卵殻の形が決まるのは排泄する瞬間ではなく、19~20時間滞留する子宮部で決まる。子宮部では飼料中のカルシウムが卵殻の形成に関わる。カルシウムが不足すると卵殻が薄くなる。卵巣での卵黄は球であるが、排泄部での卵殻は球のままであつたり、楕円形になつたり、卵形になつたり、洋梨形になつたりするのである。

岩棚に産み落とされた卵が円形や楕円形であれば転がり割れてしまい、その種は滅びたであろう。産み落とされた卵が偶然にも卵形や洋梨形であつたため転がらず、その種は保存されたのであろう。このように考えると、卵巣から排せつ部まではわずか数十cmの距離であるが、この距離には始祖鳥(ジュラ紀)以来の進化の歴史が集約されているように思える。

#### 注および引用文献

- 1) 西山豊「卵の形」『数学セミナー』1979年8月。
- 2) Nishiyama, Y., The Mathematics of Egg Shape, Int. J. Pure and Applied Math., Vol.78, No.5, 679-689, 2012.
- 3) ニワトリの卵はなぜあの形? NHK「チコちゃんに叱られる」2019年5月31日。

(にしやま・ゆたか:大阪支部, 情報数学)