大阪経済大学教養部紀要・第3号・1985年12月

〔研究ノート〕

美しいパズル

西　山　　豊

1. 地下鉄にて

私が通勤で利用している地下鉄に，「地下鉄駅間クイズ」（ニチイ営業本部企画・芦ケ原伸之監修）というのがある。何週間かをサイクルにしてクイズが出題され，解答がなされている。時々，気のきいた問題に出会うこともあり，朝夕のラッシュ時に，週刊誌の過激な広告を読むよりは，ずい分楽しませてくれる。

ある週の出題に，次のようなものがあった。5桁の数字と5桁の数字を掛けあわせると，123456789になる。その数字をあてよという問題である（図1）。

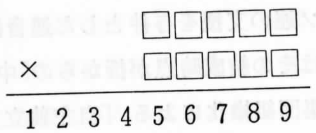


図1．虫食い算
出典：山本行雄『数芸パズル64号』

私は，もともと「虫食い算」とよばれるこの種のパズルは，あまり好きではない。パズルを解くには，緻密な思考力と高度なセンス，それに何よりも根気が要求される。だから苦手だ。

しかし，ここに掲げたパズルは，形があまりにも美しい。この美しさには，何か内面に法則がひそんでいるのではないだろうか，と幻想を抱かせる。また，出題者の「超難問」という殺し文句に惑わされて，私は，今まで見向きもしなかった虫食い算に挑戦してみる気になった。

なお，このパズルのオリジナルは，大駒誠一他『虫食算パズル700選』共立出版によれば，山本行雄『数芸パズル64号』数芸パズル愛好会（1972年4月）である。

2. パソコンで解けるけれど

さて，このパズルをどのようにして解くかであるが，私達の身近になったパソコンを使えば，たちどころに答えを与えてくれるであろう。

何の準備もなしに，FORTRANでプログラムを書いてみる。例えば，5桁の整数を2つ用意し（2重のDOループをつくる），それを掛けあわせ，その値が123456789になっているかをIF文で調べる。一致すれば，その整数を印刷する。5桁の整数について逐一計算していけば，必ず解に到達するであろう（プログラム1参照）。

```
      DO 100 I=10000,99999
      DO 200 J=10000,99999
      K=I*J
      IF(K.EQ.123456789) WRITE(6,10) I,J
   10 FORMAT(1H ,I10,' X ',I10,' = 123456789')
  200 CONTINUE
  100 CONTINUE
      STOP
      END
```

[プログラム1]

```
      DO 100 I=10001,19999,2
      IF(MOD(I,5).EQ.0) GOTO 100
      IF(MOD(123456789,I).EQ.0) GOTO 200
      GOTO 100
  200 CONTINUE
      J=123456789/I
      WRITE(6,10) I,J
   10 FORMAT(1H ,I10,' X ',I10,' = 123456789')
  100 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
10821 X      11409 = 123456789
11409 X      10821 = 123456789
```

[プログラム2]　ロジックの工夫と処理結果

今日のパソコンのレベルからすれば，上のような処理でも，さ程問題にはならないだろう。しかし，もう少し工夫をしてもよい。

まず，5桁の整数といっても，万の位は1である。また，一の位は1，3，7，9のいずれかである（$1\times9=9$，$3\times3=9$，$7\times7=49$）。さらに，MOD関数を使い，123456789÷整数の形にして，余りが0である場合が解であるとすれば，1つの整数だけに着目することができる。

以上のことをプログラム化すれば，処理時間は，かなり短縮される（プログラム2参照）。

整数を見つけるプログラムと，その改良を示したが，果して，これで満足していてよいのだろうか。

3. アルゴリズムが大切

この形の虫食い算の典型的な解き方は，前掲『虫食算パズル700選』によれば，素因数分解を応用することである。つまり，積である123456789を素因数に分解し，それをもとにして解を類推するというのである。

このケースは，

$123456789 = 3\times3\times3607\times3803$

と4つの素因数に分解され，その素因数を適当に組みあわせ，2つの積にすれば，

$= 10821\times11409$

となる。これが解である。

この方法でいくなら，電卓だけでも計算できる。ただし，素数表がいる。素数表を打ち出すには計算機にたよらざるを得ない。「電卓だけでも」と，かっこよく言っては見たものの，やはりパソコンからは離れられない。ただ，この方法が，最もエレガントであり，処理時間も最短である。

最大9桁の数の素因数分解を行なうプログラムは，素数表の作成を含めて，FORTRAN言語で約70ステップでできる（プログラム3参照）。

素数を求める場合，配列をどのくらい用意しておけばよいかは，次の素数定理を知っておくと便利である。自然数xまでの素数の個数を$\pi(x)$とすると，

$$\pi(x) = x/\log x$$

で近似される。

たとえば，9桁の素因数分解を求めるには，10万の数までの素数表がいることになり，上の式によれば，素数は約1万個あることになる（実際は9592個）。


```
C ..... PRIME DIVISOR FACTORIZATION OF UPPER 9 DIGITS NUMBER
C ... PRIME NUMBER FROM 1 TO 100000
      DIMENSION ISOSU(10000)
      DIMENSION INSU(50)
      DATA CHAX/' X '/
      ISOSU(1)=2
      ISOSU(2)=3
      ISOSU(3)=5
      ISOSU(4)=7
      NSOSU=4
      DO 100 I=11,100000,2
      IF(MOD(I,3).EQ.0) GOTO 100
      IF(MOD(I,5).EQ.0) GOTO 100
      IF(MOD(I,7).EQ.0) GOTO 100
      K=SQRT(FLOAT(I))
      DO 150 J=2,K
      IF(MOD(I,J).EQ.0) GOTO 100
  150 CONTINUE
      NSOSU=NSOSU+1
      ISOSU(NSOSU)=I
  100 CONTINUE
      NLIST=1000
      WRITE(6,1) NSOSU,(ISOSU(I),I=1,NLIST)
    1 FORMAT(1H1,'*** PRIME NUMBER  FROM 1 TO 100000 ***',
     1       /1H0,'    NUMBER OF PRIME NUMBER  =  ',I5,
     2       //
     3        (1H ,20I6))
C ... SO INSU BUNKAI
      WRITE(6,5)
    5 FORMAT(1H1,'*** SAMPLE CASE  PRIME DIVISOR FACTORIZATION ***')
  200 CONTINUE
      READ(5,2,END=900) IDATA
    2 FORMAT(I10)
      ISAVE=IDATA
      NINSU=0
      DO 250 I=1,50
      INSU(I)=0
  250 CONTINUE
```

```
  600 CONTINUE
      IF(IDATA.EQ.1) GOTO 500
      K=SQRT(FLOAT(IDATA))
      DO 300 I=1,NSOSU
      IF(ISOSU(I).GT.K) GOTO 350
      IF(MOD(IDATA,ISOSU(I)).EQ.0) GOTO 400
  300 CONTINUE
  350 CONTINUE
      NINSU=NINSU+1
      INSU(NINSU)=IDATA
      GOTO 500
  400 CONTINUE
      NINSU=NINSU+1
      INSU(NINSU)=ISOSU(I)
      IDATA=IDATA/ISOSU(I)
      GOTO 600
  500 CONTINUE
      IF(NINSU.LE.1) WRITE(6,3) ISAVE,INSU(1)
    3 FORMAT(1H0,I9,' = ',I9)
      IF(NINSU.GT.1) WRITE(6,4) ISAVE,INSU(1),
     1    ((CHAX,INSU(I)),I=2,NINSU)
    4 FORMAT(1H0,I9,' = ',I9,9(A3,I9))
      GOTO 200
  900 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
*** SAMPLE CASE  PRIME DIVISOR FACTORIZATION ***

      12 =        2 X       2 X       3
     123 =        3 X      41
    1234 =        2 X     617
   12345 =        3 X       5 X     823
  123456 =        2 X       2 X       2 X       2 X       2 X
                  2 X       3 X     643
 1234567 =      127 X    9721
12345678 =        2 X       3 X       3 X      47 X   14593
123456789 =       3 X       3 X    3607 X    3803
987654321 =       3 X       3 X      17 X      17 X  379721
111111111 =       3 X       3 X      37 X  333667
```

［プログラム３］　最大９桁までの数の素因数分解を行なうプログラムとその処理例

4. 可能性と偶然性

私がこのパズルを解くことになった動機は，形の美しさであった。このように数字が美しく並ぶのは，何か特別な理由があるのであろうか。以下は，私の調べたところである。

このパズルを視点を変えてみると，方程式

$xy=k$（kは整数定数）

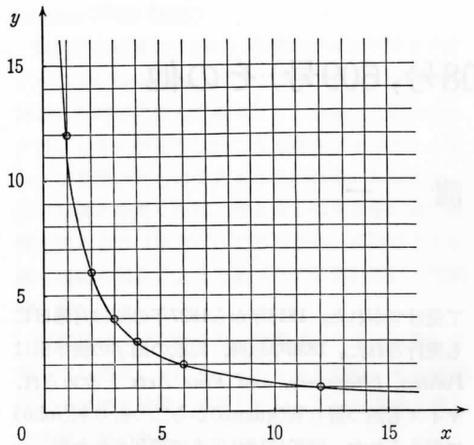
の整数解（x, y）を求める問題になる。

この方程式は，よく知られている双曲線である。実数の連続性から，解は無限個存在するが，整数解に限定すると，曲線が格子点と重なった場合だけである。

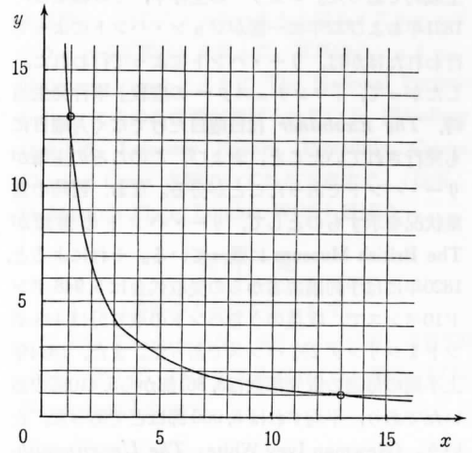
図２に，$k=12$と13の場合について作図してみた。$k=12$については，

$12=2\times2\times3$

と素因数分解され，丸印で示したように，（１，12），（２，６），（３，４），（４，３），（６，２），（12，１）



(1) $k=12$ の場合



(2) $k=13$ の場合

図２．$xy=k$ のグラフ
丸印が整数解

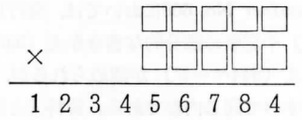


図３

の合計６個の整数解を持つ。

一方，$k=13$については，13が素数であるため，（１，13），（13，１）の自明の２個の整数解しか持たない。

さて，$k=123456789$の場合についてであるが，この場合は，うまく素因数に分解され，しかも，その整数解の一つが，$x\sim y$（xとyの値のオーダーが同じ）に存在するという条件を満たしている。だからこの美しいパズルができたのである。

こういうケースは，$k=123456789$の場合にのみ成立つのであろうか。その疑問を明らかにするには，kの値について，その周辺の様子を調べてみればよい。

$k=123456770$から123456810 の41ケースについて素因数分解してみると，驚くなかれ，他にも条件を満たす例が存在したのである。

$123456784=2^4\times11^2\times43\times1483$
$\qquad=10406\times11864$
$123456806=2\times11\times547\times10259$
$\qquad=10259\times12034$
$123456810=2\times3\times5\times1049\times3923$
$\qquad=10490\times11769$

の３個がそうである。

同時に，123456791と123456803の２個は素数であることもわかった。

41ケースの中で，あわせて４ケースが条件を満たしているのだから，約１割の可能性をひめていることになる。その可能性の中で，たまたま $k=123456789$の場合に解が存在したのである。だから，このパズルは，全く偶然であるとは言えないし，特別な数字の内部構造を持っているとも言えない。

図３に示したようなパズルは，可能ではあるが，誰も興味を持たないであろう。図１の美しいパズルに巡り合ってこそ，好奇心が駆りたてられるのだ。ここに，パズルの創案者，山本行雄氏の演出がうかがわれる。

久しぶりに「数字あそび」を経験した。このパズルは解き方をめぐって変化があり，プログラム実習のよい例題になると思った。

（1985. 8. 29）