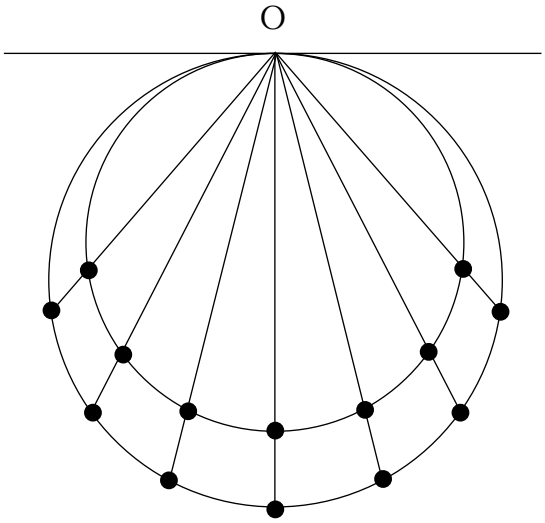
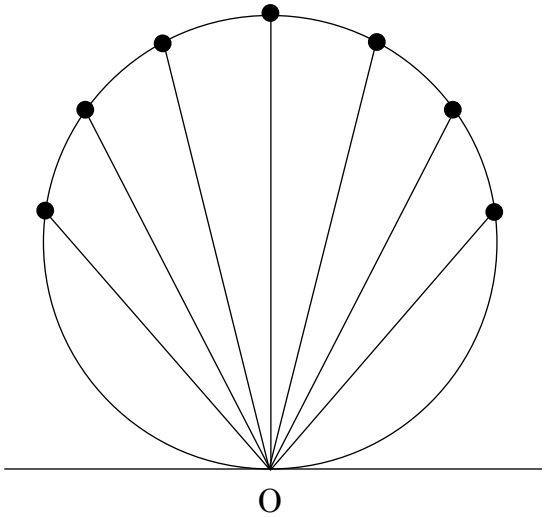
Y. Nishiyama, 18 Oct 2021

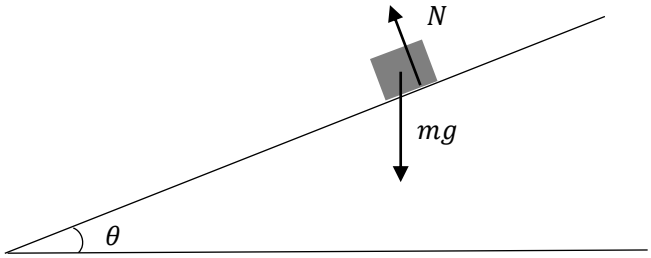
ガリレオの定理

物体が原点から一斉に斜面を滑り降りるとき、任意の時刻の分布は円をなす（左)。
円周上にある物体が一斉に滑り降りるとき、すべての物体が同時に原点に到達する（右)。





（証明）



質量mの物体が傾斜角θの斜面を摩擦なく下るとする。重量加速度をgとする。
この物体に働く力は鉛直下方にmgと、斜面に直角に垂直抗力Nの２つである。
mgを斜面に沿う方向と垂直な方向に分解すると

$$mg\sin\theta$$

$$mg\cos\theta$$

となる。
$mg\cos\theta$ は　垂直抗力Nと釣り合う。斜面方向の加速度は　$F = ma$ より

$$mg\sin\theta = ma$$

$$a = g\sin\theta$$

出発点Oを原点とし、水平方向にx軸、鉛直下方にy軸をとると、物体の加速度の成分は

それぞれ

$$a_x = g\sin\theta\cos\theta$$
$$a_y = g\sin\theta\sin\theta$$

となる。初速度を 0 とすると、t秒後の位置座標は

$$x = \frac{g}{2}\cdot\sin\theta\cos\theta\cdot t^2 \qquad (1)$$

$$y = \frac{g}{2}\cdot\sin\theta\sin\theta\cdot t^2 \qquad (2)$$

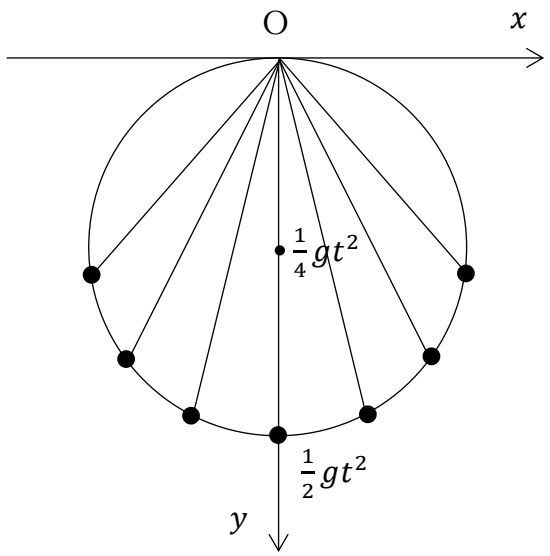
で与えられる。(1)，(2)をそれぞれ 2 乗して

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{g^2t^4}{4}(\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta) \\ &= \frac{g^2t^4}{4}\cdot\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \frac{g^2t^4}{4}\cdot\sin^2\theta \\ &= \frac{gt^2}{2}\cdot y \end{aligned}$$

この式はつぎのように変形できる。

$$x^2 + \left(y - \frac{gt^2}{4}\right)^2 = \left(\frac{gt^2}{4}\right)^2$$

これは円の方程式で、t秒後に中心が$\left(0,\ \frac{gt^2}{4}\right)$，半径$\frac{gt^2}{4}$ の円周上に物体があることになる。



（参）柏陽高校・山本明利「学生読み物 ガリレオの定理 斜面を下る物体は円をなす」
https://www2.hamajima.co.jp/~tenjin/labo/galileo.pdf