

談話室

不思議な数 6174

西山 豊

1 4桁の数の引き算

ほとんどの人にとって数学に対するよい思い出はない。受験が終われば忘れてしまいたいという存在だ。私は、逆に数学が好きだったので、数学の教育や研究を職業にしてきた。こんなにおもしろい学問はないと思うのだが、その一つをここで紹介したい。

6174 は実に不思議な数である。どんな数であるかを説明する前に、簡単な計算をしていただく。まず4桁の数を一つ決める。その場合、1111 や 2222 などのように各桁がすべて同じものは除くことにする。

例えば、今年の年 2016 としよう。4桁の数を構成する4個の数字を並べ変えて一番大きい数と、一番小さい数を作る。4桁にならない場合は左側に0を埋めて4桁にする。2016 の場合は 6210 と 0126 である。そこで、この最大数と最小数の差をとると、

$$6210 - 0126 = 6084$$

になる。このような操作をカプレカー操作という。名前の由来はこの数を発見したインドの数学者、D.R. カプレカー (1949年) による。新しくできた数 6084 に対してこの操作を繰り返すと、

$$8640 - 0468 = 8172$$

$$8721 - 1278 = 7443$$

$$7443 - 3447 = 3996$$

$$9963 - 3699 = 6264$$

$$6642 - 2466 = 4176$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

になる。

数が 6174 に到達すると、この数が繰り返される。つまり 6174 で循環するのだ。そこで、この数を不動数と呼ぶことにする。どんな数

から始めてもよい。必ず 6174 の不動数に到達するのである。疑うなら別の数でやってみよう。1789 は次のようになる。

$$9871 - 1789 = 8082, 8820 - 0288 = 8532 \\ 8532 - 2358 = 6174$$

2016 はカプレカー操作を7回で、1789 は3回で 6174 に到達した。この現象はすべての4桁の数に対して成り立つのだ。

児童に課す算数の計算ドリルも、無味乾燥な計算ばかりをやらせるのではなく、このような不思議を体験させることも大切ではないだろうか。

2 6174 に到達する回数と経路

6174 の不思議な現象を体験すると、すべての4桁の数がそうなるのか確かめてみたくなるものだ。それには50行ほどの簡単なプログラムを作成すれば、この事実を確認できる。パソコンの得意な読者は確かめられたい。

また、何回のカプレカー操作(最大数から最小数を引く)で 6174 に到達するかの度数分布を作成することができる。到達回数の最大は7回であるので、7回でも 6174 に到達しなければ途中のどこかで計算を間違っているのである。計算ミスを知ることで、自分がどういう引き算に弱いかわかることになる。

では、なぜ4桁のすべての数が 6174 に到達するのだろうか。それは、一般に次のように説明されている。4桁の数を $abcd$ (ただし $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$) とすると、最大数は $1000a + 100b + 10c + d$ であり、最小数は $1000d + 100c + 10b + a$ となる。最大数から最小数を引くと、

$$999(a - d) + 90(b - c)$$

となる。さて、 $(a - d)$ は 1 と 9 の間の値をとり、 $(b - c)$ は 0 と 9 の間の値をとるから、上記の形の数は全部で 90 個となり、これらの数を表計算ソフトで表示することができる。そして、この 90 個の数から作られる最大数は図で示される 30 個だけになる。こ

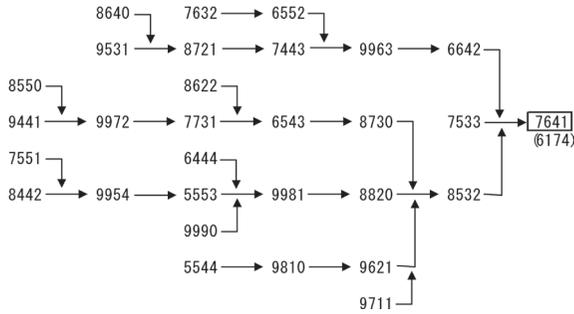


図 7641 (6174) への系統図

ここからが不思議なことだが、この 30 個の数はすべて 6174 に到達するのである。その系統図で示しておく。

以上より、すべての 4 桁の自然数が 6174 に、最大 7 回で到達することがわかる。でも、なぜ 6174 に到達するのか本当の理由はわかっていない。

3 4 桁以外の数はどうなるか

6174 に到達するという現象は、4 桁以外の数でも起こるのだろうか。実は、3 桁の数についても確認されていて、すべての 3 桁の数はカプレカー操作（最大から最小を引く）により 495 に到達する。読者はこのことを確かめてください。

4 桁の数が 6174 に、3 桁の数が 495 に到達するのだから他の桁の数も同じことが起こるのではないかと期待するであろうが、残念ながらこのような現象が起こるのは 4 桁と 3 桁の数についてだけしか確認されていない。

2 桁の数については循環をする。5 桁の数については、三つの循環グループのどれかに入ることが知られている。6 桁あるいはそれ以上の数については、不動数の存在は確認されているが、すべての数がある不動数に到達するということはない。

4 6174 は世界を駆け巡る

私は、2005 年度にイギリスのケンブリッ

ジ大学に留学する機会があった。ミレニアム数学プロジェクトのオンライン・マガジン Plus に拙稿「6174 の不思議」を英訳して投稿したところ、Mysterious Number 6174 というタイトルで掲載された¹⁻²⁾。この記事には予期せぬ反響があった。

イギリスから帰国後のこと Plus 編集部から、あなたの記事が世界中で読まれているとメールが届く。数学フォーラムやブログに記事が紹介され、Plus のホームページを訪問するカウントが急上昇しているという。本当かなと思って調べてみると、英語だけでなくスペイン語、フランス語、ドイツ語、ハンガリー語などヨーロッパ言語に翻訳されていた。

数カ月たって調べてみると、中国語、韓国語、ベトナム語、タイ語、アラビア語などアジア・アフリカの母国語にも翻訳されていた。そして、日本語にまで翻訳されていたので驚いた。英語が公用語であり、記事や論文を英語に翻訳しておくことの重要性を改めて知らされた。

同時に世界中の読者からメールが届いた。イタリア人からももらったメールには、「すべての道はローマに通じる。すべての数は 6174 に通ずる」とあった。子どもだけでなく若者の数学嫌いや理科離れが問題にされるが、それをなくす方策は、私たち科学者が、このような魅力ある教材を開発することではないだろうか。

引用資料

- 1) 西山豊「6174 の不思議」『理系への数学』現代数学社, 39 (1), 9-12, (2006)。
- 2) Nishiyama, Y. Mysterious Number 6174, Plus, Cambridge, 38, (Mar 2006).
<https://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama/index>
 (最終閲覧日：2016 年 7 月 4 日)

(にしやま・ゆたか:大阪経済大学, 情報数学)