$$1+2+3+4+5+\cdots=-\frac{1}{12}$$

19th Dec 2014 Yutaka Nishiyama
Updated 20th Dec 2014

オイラーによるゼータの計算

（参）黒川信重『オイラー、リーマン、ラマヌジャン』岩波科学ライブラリー126、43〜47ページ

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}+6^{-s}+\cdots$$

の代わりに符号をつけた

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}=1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+5^{-s}-6^{-s}+\cdots$$

を考えます。（φ はギリシャ文字で‘ファイ’とよみます。）

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=(1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}+6^{-s}+\cdots)-2\cdot(2^{-s}+4^{-s}+6^{-s}+\cdots)\\&=(1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+5^{-s}+6^{-s}+\cdots)-2\cdot 2^{-s}(1+2^{-s}+3^{-s}+\cdots)\\&=(1-2^{1-s})(1+2^{-s}+3^{-s}+\cdots)\\&=(1-2^{1-s})\zeta(s)\end{aligned}$$

となりますので

$$\begin{gathered}\varphi(0)=-\zeta(0)\\\varphi(-1)=-3\zeta(-1)\\\varphi(-2)=-7\zeta(-2)\\\varphi(-3)=-15\zeta(-3)\\\cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

が得られます。したがって

$$\begin{gathered}\text{"1+1+1+}\cdots\text{"}=\zeta(0)=-\varphi(0)\\\text{"1+2+3+}\cdots\text{"}=\zeta(-1)=-\frac{1}{3}\varphi(-1)\\\text{"1+4+9+}\cdots\text{"}=\zeta(-2)=-\frac{1}{7}\varphi(-2)\\\text{"1+8+27+}\cdots\text{"}=\zeta(-3)=-\frac{1}{15}\varphi(-3)\\\cdots\cdots\cdots\end{gathered}\tag{1}$$

がわかりました。そこで、$\varphi(0), \varphi(-1), \varphi(-2), \cdots$ を計算すればよいわけです。
それには前にもでてきた

$$\text{(a)} \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

を使います。ここで$x = -1$ とおくと

$$\text{"1-1+1-1+}\cdots\text{"} = \frac{1}{2}$$

と求まり、この左辺は$\varphi(0)$ に一致します。(1) を用いると

$$\zeta(0) = \text{"1+1+1+1+}\cdots\text{"} = -\frac{1}{2}$$

がわかるのです。”” が付いていることに注意してください。
さらに (a) の両辺を２乗すると

$$\text{(b)} \qquad 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

が得られます。実際

$$\begin{aligned}
&(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 \\
&= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\
&= 1 + (x \cdot 1 + 1 \cdot x) + (x^2 \cdot 1 + x \cdot x + 1 \cdot x^2) + (x^3 \cdot 1 + x^2 \cdot x + x \cdot x^2 + 1 \cdot x^3) \\
&+ \cdots \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

となります。この(b) で$x = -1$ とおくと

$$\text{"1-2+3-4+}\cdots\text{"} = \frac{1}{4}$$

となり、この左辺は$\varphi(-1)$ に一致します。(1) を用いると

$$\zeta(-1) = \text{"1+2+3+4+}\cdots\text{"} = -\frac{1}{12}$$

がわかります。

（中略）

ところで

$$\text{"1+2+3+4+}\cdots\text{"} = -\frac{1}{12}$$

や

$$"1+8+27+64+\cdots" = \frac{1}{120}$$

はいったい何を意味しているのでしょうか？　もちろん普通にはどちらも無限大になっているはずです。これらの計算は計算の達人であるオイラーが 250 年前にやった計算なのですが、とくに"$x = -1$" とおいたところは“あぶない”計算です（収束していない！）。それを解析接続という手法で意味を付けたのはオイラーの 100 年後のリーマンでした。

なお、これらの値はゼータの特殊値としての解釈ができるだけでなく自然界にもふつうに現れているのかも知れません。たとえばラモローさんが 1997 年に、量子力学において 50 年間念願とされてきたカシミール効果 [注] をアメリカのシアトルにおける実験で確認したときの理論値は実質的に

$$"1+8+27+64+\cdots" = \frac{1}{120}$$

でした。無限大になるところをうまく引き去って（繰り込んで）意味のある有限値を出すことを物理学の言葉で「繰り込み」と言いますが、上記の値はその一例と考えられます。

（後略）

（関連サイト）

（1）動画（Numberphile ビデオ）

ASTOUNDING: 1+2+3+4+5+...=-1/12

https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww#t=10

（2）ケンブリッジ・オンラインマガジン Plus の記事

Infinity or -1/12? by David Berman and Marianne Freiberger

http://plus.maths.org/content/infinity-or-just-112

（3）カシミール効果（Casimir effect）（Wikipedia）

http://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect

（4）米国 MAM（アメリカ数学月間の会）2014 年のサイトより

Astounding Infinity　（無限の脅威）

http://www.mathaware.org/mam/2014/calendar/infinity.html

（1）　の動画を数式化すると…

$$1+2+3+4+5+6+ \qquad \to \infty$$

となるところだが、

$$1+2+3+4+5+6+\cdots=-\frac{1}{12}$$

これは STRING THEORY（弦理論）の教科書にも明記されている。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \to -\frac{1}{12}$$

$$S_1 = 1-1+1-1+1-1+1-\cdots$$

$$S_2 = 1-2+3-4+5-6+7-\cdots$$

$$S = 1+2+3+4+5+6+7+\cdots$$

のような３つの無限級数を考える。

$$S_1 = 1-1+1-1+1-1+1-\cdots=\frac{1}{2}$$

であろう。

$$\begin{array}{rl} S_2 = & 1-2+3-4+5-6+7-\cdots \\ + \quad S_2 = & \quad 1-2+3-4+5-6+7-\cdots \\ \hline 2S_2 = & 1-1+1-1+1-1+1-\cdots \end{array}$$

$$2S_2=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} S-S_2 &= 1+2+3+4+5+6+7+\cdots \\ &\quad -[1-2+3-4+5-6+7-\cdots] \\ &= \quad 4 \quad + \quad 8 \quad + \quad 12 \quad + \quad \cdots \\ &= 4(1+2+3+\cdots) \\ &= 4S \end{aligned}$$

$$S-\frac{1}{4}=4S$$

$$-\frac{1}{4}=3S$$

$$S=-\frac{1}{12}$$

$$1+2+3+4+5+6+7+\cdots=-\frac{1}{12}$$