バーンサイドの補題

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　経営情報学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．サイコロを３色で塗り分ける

ある雑誌に数え上げの問題を出題したところ，読者からバーンサイドの補題を使った素晴らしい解答が寄せられた．私はバーンサイドの補題を知らなかった．これは，群論の知識が必要で記号に慣れる必要があるが，それほど難しくなく高校生でも理解できるのではないだろうか．出題はつぎの通りであった．

図１のように対角線を境に色分けしている正方形がある．この正方形４枚を使って２×２のマス目を埋めるとき，異なったパターンは全部で何通りできるか．ただし，色の対称，回転対称，ミラー対称などは同じとみなす．

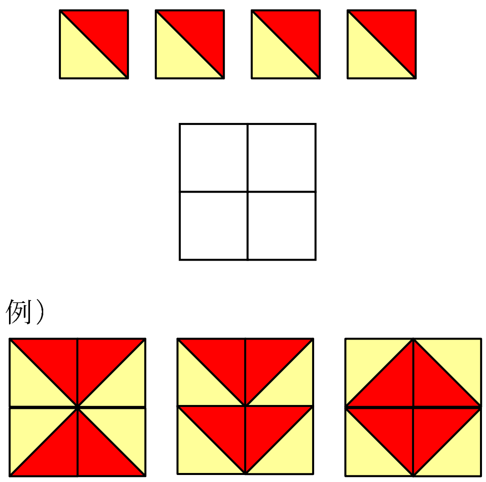

図１．全部で何通り？

２．場合分けによる解法

さて，今回はバーンサイドの補題の紹介が目的であるので，よく使われる例

題の説明から入ろう．図２のようにサイコロがある．このサイコロの６面を３色で塗り分けた場合，何通りのパターンができるだろうか．

はじめに，場合分けによる一般的な解法を説明しよう．サイコロは正６面体であるから，面の数が６個ある．そこに３色（たとえば青色，黄色，赤色）を塗るとしよう．ひとつの面には３色の塗りわけが可能である．そして６面がそれぞれ独立しているので全部で

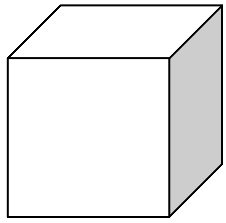

図２．サイコロを３色で塗りわける．

$3^6 = 729$通り

の塗り方があることになる．

これらをすべてチェックするのは困難な作業である．そこで，つぎのように整理して考えてみよう．

塗りわけに何色用いるかで分類すると１色，２色，３色の３通りとなる．これを大分類としよう．１色の場合は単純で青色が６面，黄色が６面，赤色が６面の３パターンとなる．

つぎに２色の場合は，色の比率が５面と１面，４面と２面，３面と３面の３通りとなる．これを中分類としよう．そして，２色は３色の中からどの２色を選ぶかの組合せが関係する．３色の場合は，色の比率が４面と１面と１面，３面と２面と１面，２面と２面と２面の３通りとなる．このようにして数え上げていくと異なったパターンは 57 通りとなる．

この数え上げ作業はノートと鉛筆ではおそらく不可能であろう．私は，実際にパソコンで展開図を描き，それに色を配置して何度も確認した．頭の中で考えていた異なったパターンを実際に作ってみると同じものであることが何度もあった．最終的には DIY 店で工作材の木製のブロック（１辺が２センチ）を買い，それに色紙を貼って 57 パターンを確認した．表１に 57 パターンのすべてを示しておく．青色を B,黄色を Y,赤色を R とし，先頭行の１から６の数字は展開図に示した面の番号である（図３）．

No.	1	2	3	4	5	6	B	Y	R		
1	B	B	B	B	B	B	6			6	1 色
2	Y	Y	Y	Y	Y	Y		6			
3	R	R	R	R	R	R			6		
4	B	Y	B	B	B	B	5	1		5+1	2 色
5	B	R	B	B	B	B	5		1		
6	Y	B	Y	Y	Y	Y	1	5			
7	Y	R	Y	Y	Y	Y		5	1		
8	R	B	R	R	R	R	1		5		
9	R	Y	R	R	R	R		1	5		
10	B	Y	Y	B	B	B	4	2		4+2	
11	B	R	R	B	B	B	4		2		
12	Y	B	B	Y	Y	Y	2	4			
13	Y	R	R	Y	Y	Y		4	2		
14	R	B	B	R	R	R	2		4		
15	R	Y	Y	R	R	R		2	4		
16	B	Y	B	Y	B	B	4	2			
17	B	R	B	R	B	B	4		2		
18	Y	B	Y	B	Y	Y	2	4			
19	Y	R	Y	R	Y	Y		4	2		
20	R	B	R	B	R	R	2		4		
21	R	Y	R	Y	R	R		2	4		
22	B	Y	Y	B	B	Y	3	3		3+3	
23	Y	R	R	Y	Y	R		3	3		
24	R	B	B	R	R	B	3		3		
25	B	Y	Y	Y	B	B	3	3			
26	Y	R	R	R	Y	Y		3	3		
27	R	B	B	B	R	R	3		3		
28	B	Y	R	B	B	B	4	1	1	4+1+1	3 色
29	Y	R	B	Y	Y	Y	1	4	1		
30	R	B	Y	R	R	R	1	1	4		
31	B	Y	B	R	B	B	4	1	1		
32	Y	R	Y	B	Y	Y	1	4	1		
33	R	B	R	Y	R	R	1	1	4		
34	B	Y	Y	R	B	B	3	2	1	3+2+1	
35	Y	R	R	B	Y	Y	1	3	2		
36	R	B	B	Y	R	R	2	1	3		
37	B	R	R	Y	B	B	3	1	2		
38	Y	B	B	R	Y	Y	2	3	1		
39	R	Y	Y	B	R	R	1	2	3		
40	B	Y	R	B	B	Y	3	2	1		
41	Y	R	B	Y	Y	R	1	3	2		
42	R	B	Y	R	R	B	2	1	3		
43	B	R	Y	B	B	R	3	1	2		
44	Y	B	R	Y	Y	B	2	3	1		
45	R	Y	B	R	R	Y	1	2	3		
46	B	Y	R	Y	B	B	3	2	1		
47	Y	R	B	R	Y	Y	1	3	2		
48	R	B	Y	B	R	R	2	1	3		
49	B	R	Y	R	B	B	3	1	2		
50	Y	B	R	B	Y	Y	2	3	1		
51	R	Y	B	Y	R	R	1	2	3		
52	Y	B	R	B	R	Y	2	2	2	2+2+2	
53	R	Y	B	Y	B	R	2	2	2		
54	B	R	Y	R	Y	B	2	2	2		
55	B	Y	R	R	B	Y	2	2	2		
56	B	Y	R	R	Y	B	2	2	2		
57	B	R	B	R	Y	Y	2	2	2		

表１．３色による塗りわけ（B:青，Y:黄，R:赤）

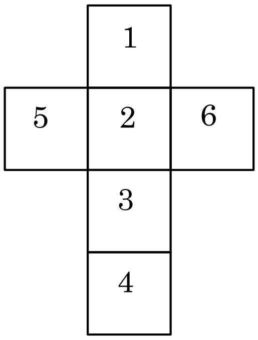

図３．サイコロの面の番号

３．バーンサイドの補題による解法

このように積み上げ方式で数えるにはいくら慎重に数えても，数え間違いや取りこぼしがあるものである．このようなとき，バーンサイドの補題という群論の知識を応用した有力な方法がある．以下，それを説明しよう．

フリーの百科事典ウイキペディアには，バーンサイドの補題についてつぎのように記述されている．バーンサイドの補題はバーンサイドの数え上げ定理，ポリヤの公式，コーシー＝フロベニウスの補題または軌道計算定理と呼ばれている．これらは同じものをさしている．バーンサイドはこの補題を 1900 年に書いている．数学史家の中には，コーシーが 1845 年にフロベニウスが 1887 年にこの公式のことを書いているのでバーンサイドが第一発見者でなく,「バーンサイドの補題でない」と呼ぶのが正式な呼び方であるとする人もいる．

集合 X に作用する置換群 G があるとき, 群 G の要素 g によって不変なものの個数を X^g とするとき，軌道(orbit)の数 $|X/G|$ はつぎの公式で表される．

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X^g|$$

軌道の数は同値なものの数を意味する．

サイコロの６面を３色で塗り分ける場合，$3^6 = 729$ 通りの塗り方があることは前に示した．この集合を X とする．集合 X に対して４種類の回転群 G が考えられる．

(1) たがいに向かい合う面と面を貫く軸を中心に 90°回転する（これは６つある)．図４(1)のように面 ABFE と面 DCGH を貫く軸を中心に 90°回転する．この場合，向かいあう面 ABFE と DCGH は色が異なってもよいので 3^2 通り，90°回転移動する４つの面 ABCD, BFGC, EFGH, AEHD は同じ色でなければならないので３通り．したがって各軸に対して 3^3 通りあり，ぜんぶで 6×3^3 通りである．

(2)たがいに向かい合う面と面を貫く軸を中心に 180°回転する（これは３つある)．図４(1)のように面 ABFE と面 DCGH を貫く軸を中心に 180°回転する．この場合, 向かい合う面 ABFE と DCGH は色が異なってもよいので 3^2 通り, 180°回転移動するので４つの面で対面する面は同じ色でなければならない．たとえば面 ABCD と EFGH，面 BFGC と AEHD は同じ色であるから 3^2 通り．したがって各

軸に対して3^4通りあり，ぜんぶで3×3^4通りである．

(3)たがいに向かい合う頂点と頂点を貫く軸を中心に120°回転する（これは８個ある)．図４(2)のように頂点Bと頂点Hを貫く軸を中心に120°回転する．この場合，頂点Bを含む３つの面ABCD,BFGC,ABFEは同じ色でなければならなく，頂点Hを含む３つの面DCGH,EFGH,AEHDは同じ色でなければならない．色の組合せは各軸に対して3^2通りあり，ぜんぶで8×3^2通りである．

(4)たがいに向かい合う辺と辺を貫く軸を中心に180°回転する（これは６つある)．図４(3)のように辺BFと辺DHを貫く軸を中心に180°回転する．この場合，辺BFを含む２つの面BFGC,ABFEは同じ色でなければならなく，辺DHを含む２つの面DCGH,AEHDは同じ色でなければならない．また，180°回転移動する２つの対面ABCD,EFGHは同じ色でなければならない．色の組合せは各軸に対して3^3通りあり，ぜんぶで6×3^3通りである．

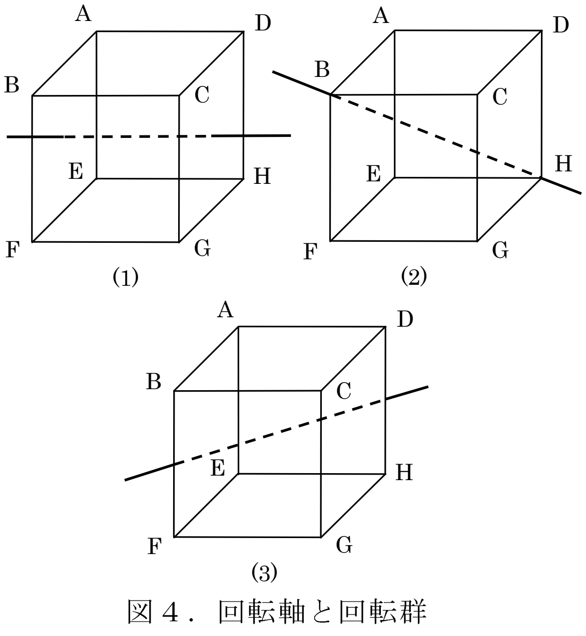

図４．回転軸と回転群

回転群Gの要素の数は恒等置換eを加えて$1+6+3+8+6=24$である．以上を公式にあてはめると

$$\frac{1}{24}(3^6+6\times 3^3+3\times 3^4+8\times 3^2+6\times 3^3)=57$$

となり，異なるパターンは57通りである．

４．群論，置換群，そして同値類

集合 X と X の置換群 G とが与えられているとき，G によって誘導される X 上の同値関係による X の同値類の個数を求めたい．この問題は，その同値関係を求めそれから同値類の個数を数えることによって，直接解くこともできる．しかしながら，集合 X が非常に多くの要素を含んでいるとき，そのような数え上げは，手がつけられないほどめんどうなものとなる．

バーンサイドの定理によれば，その群の要素（置換）のもとで不変な X の要素を数えることによって，同値類の数を求めることができる．ある置換がある要素を自分自身にうつすならば，その要素はその置換のもとで不変である(invariant)とよばれる．

置換群 G に含まれる要素(置換)の個数を $|G|$ と表す．置換 $\pi \in G$ に対して，π によって自分自身に写像される要素を“不変な”要素すなわち不変元と呼び，不変元の個数を $n(\pi)$ と表す．

【定理】（バーンサイド）　集合 X の置換群 G によってもたらされる同値関係による集合 X の同値類の個数 $N(X)$ は次式で与えられる．

$$N(X) = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} n(\pi) \qquad (1)$$

簡単な例題を以下に示す．図５のように正三角形の３つの頂点をそれぞれ A, B, C とし，これらの頂点に赤または白の色を塗る場合を考える．このような塗り方は図６の $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_8\}$ のように全部で $2^3 = 8$ 通りある．ここで，たとえば正三角形の中心を通り三角形に垂直な軸のまわりに時計方向に $120°$ ずつ回転させると図６の P_2 は P_3 に，P_3 は P_4 になる．つまり P_2, P_3, P_4 などは“同値”であるとみなすことができる．

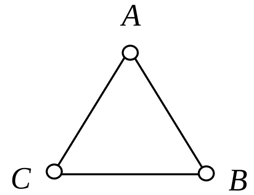

図５．正三角形

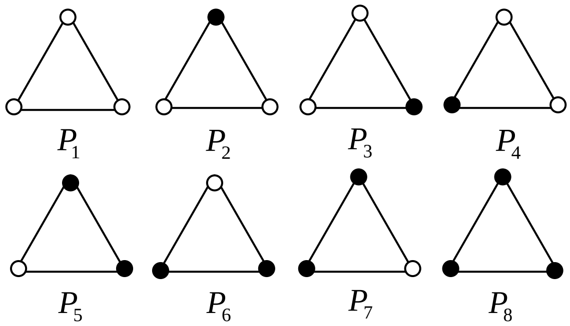

図６．正三角形の彩色

正三角形の中心を通り三角形に垂直な軸のまわりに時計方向に$120°, 240°$ずつ回転させた場合，$P_1, \cdots, P_8$がどのように置換されるかについては，以下のように表すことができる．

$$\pi_1 = (P_1)(P_2P_3P_4)(P_5P_6P_7)(P_8)$$
$$\pi_2 = \pi_1\pi_1 = (P_1)(P_2P_4P_3)(P_5P_7P_6)(P_8)$$

そして，それぞれの置換πに対する不変元の個数$n(\pi)$は次のようになる．

$$n(\pi_1) = n(\pi_2) = 2 \qquad (2)$$

一方，正三角形を１つの頂点と対辺の中点を結ぶ直線のまわりに$180°$回転させると，P_5はP_7，あるいはP_5はP_6になる．このことから，やはりこれらが“同値”であることがわかる．これらの場合の$P = \{P_1, P_2, \cdots, P_8\}$の置換については，以下のように表すことができる．

$$\pi_3 = (P_1)(P_2)(P_3P_4)(P_5P_7)(P_6)(P_8)$$
$$\pi_4 = (P_1)(P_2P_4)(P_3)(P_5P_6)(P_7)(P_8)$$
$$\pi_5 = (P_1)(P_2P_3)(P_4)(P_5)(P_6P_7)(P_8)$$

そして，それぞれの置換πに対する不変元の個数$n(\pi)$は次のようになる．

$$n(\pi_3) = n(\pi_4) = n(\pi_5) = 4 \qquad (3)$$

すでに示した置換$\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_5\}$に，すべての要素をそれ自身に写像する恒等置換である

$$\pi_0 = (P_1)(P_2)(P_3)(P_4)(P_5)(P_6)(P_7)(P_8)$$

を加えると，これらが群をなすことがわかる．このように置換群によってもたらされる集合$P = \{P_1, P_2, \cdots, P_8\}$の同値類の個数$N(X)$は，式(2)，(3)，そして$\pi_0$を用いると，式(1)より以下のように与えられる．

$$N(P)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=0}^{5}n(\pi_i)=\frac{1}{6}(8+2\times 2+3\times 4)=4$$

したがって，同値類の個数は４となり，それぞれの同値類は$\{P_1\}, \{P_2, P_3, P_4\}$, $\{P_5, P_6, P_7\}, \{P_8\}$のように与えられることがわかる.表２は置換による要素の移り方を，表３は置換によっても変わらない不変元を、表４は同値関係を示している.

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1
P_2	P_2	P_3	P_4	P_2	P_4	P_3
P_3	P_3	P_4	P_2	P_4	P_3	P_2
P_4	P_4	P_2	P_3	P_3	P_2	P_4
P_5	P_5	P_6	P_7	P_7	P_6	P_5
P_6	P_6	P_7	P_5	P_6	P_5	P_7
P_7	P_7	P_5	P_6	P_5	P_7	P_6
P_8	P_8	P_8	P_8	P_8	P_8	P_8

表２．置換による要素の移り方

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5
P_1	=	=	=	=	=	=
P_2	=			=		
P_3	=				=	
P_4	=					=
P_5	=					=
P_6	=			=		
P_7	=				=	
P_8	=	=	=	=	=	=
	8	2	2	4	4	4

表３．不変元

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
P_1	✔							
P_2		✔	✔	✔				
P_3		✔	✔	✔				
P_4		✔	✔	✔				
P_5					✔	✔	✔	
P_6					✔	✔	✔	
P_7					✔	✔	✔	
P_8								✔

表４．同値関係

参考文献

(1) 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』2006.9

(2) Burnside’s lemma, From Wikipedia.

(3) C. L. Liu 著，成嶋弘，秋山仁共訳『コンピュータサイエンスのための離散数学入門』Ohmsha, 1995, 450-457

(4) 大山達雄『パワーアップ離散数学』共立出版, 1997, 70-76