不動点の作図

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　経営情報学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．エレガントな作図

いま，図 1 に示すように 2 枚の正方形の用紙がアトランダムに置かれている．これらを重ね合わせるための不動点を最も簡潔に求めてみよう．合同な図形を重ねるためには，私たちはどのようにしているのだろうか.まず，図 2(1)のように回転移動をし，その後，図 2(2)のように平行移動をすることによって，重ね合わせを完了する．回転移動と平行移動の順序は逆でもよい．日常生活ではこのようなことはしないが，「数学的に」記述すれば合同な図形は平行移動と回転移動，または対称移動を組み合わせることによって重ね合わされるということである．このことを合同変換という．

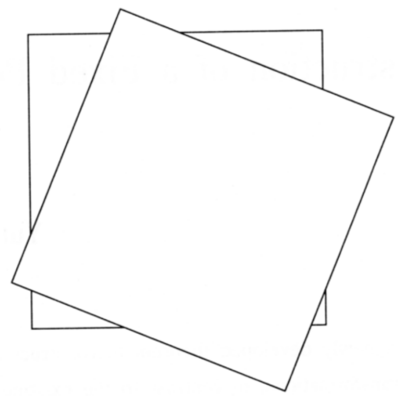
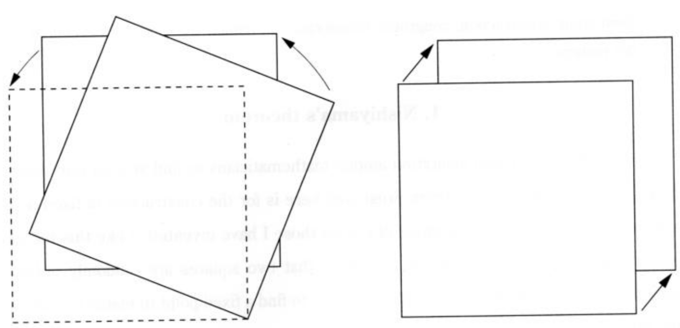


図１．



(1)　回転移動　　　　(2)　平行移動

図２．図形の移動

一方，平行移動と回転移動の 2 つの操作による移動は，1 つの回転移動におきかえられる．この場合の回転中心は合同変換の不動点になっている．

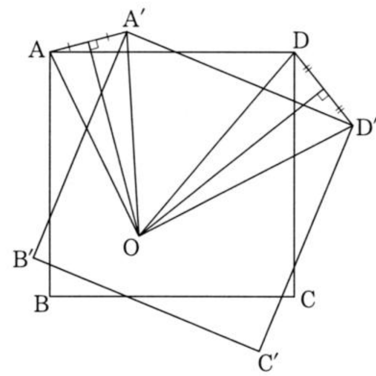


図３．垂直二等分線による証明

不動点を求めるためのユークリッド幾何学による一般的な作図法は，つぎのように知られている．証明のために下の正方形を ABCD，上の正方形を A′B′C′D′とする．正方形ABCDの辺ADに注目すると，辺 AD は辺 A′D′に移動する．頂点 A が頂点 A′に頂点 D が頂点 D′に移動するのであるから，線分 AA′の垂直２等分線と線分 DD′の垂直２等分線の交点 O が回転の中心になり，不動点になる（図３）．交点 O が不動点である理由は，三角形 AOD と三角形 A′OD′が合同な三角形になることから明らかである．

さて，もっと効率よくエレガントに不動点を作図できないものだろうか．私は図４に示すように用紙の上に 2 本の直線を引いてみた．そして，その交点をコンパスの針で押さえ，上の用紙を回転させてみた．するとどうだろう．2 枚の正方形は完全に重なったのである．私は最初，偶然だろうと疑った．用紙を別の位置に重ねて何度もトライするうちに，これらが不動点であることを確信するに至った．たった 2 本の直線を引くだけで，その交点が不動点になっているのだ．(1)

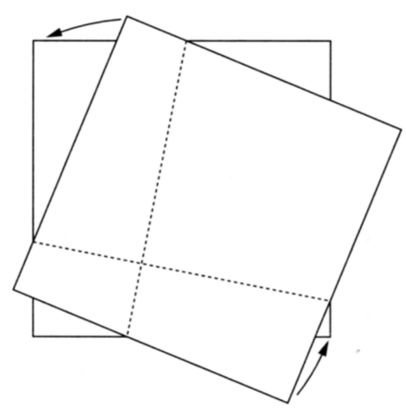


図４．エレガントな作図法

図３に示した従来の作図法はコンパスと定規が必要であるが，図４に示した私の作図法はコンパスを使わないところが最大の特徴である．この不動点の作図法が可能なのは四角形の対辺が平行であることが必要条件であるので，正方形でなく長方形や平行四辺形にも

この定理が適用される．読者は手頃な正方形の用紙が無いときは，レポート用紙やコピー用紙（長方形）でもこの現象を試すことができる．

図４において引いた２本の補助線の交点がなぜ不動点になっているのかの証明は，誌面の都合上参考文献(1)にゆずることにする．

２．ランダム・ドット・パターン

合同な正方形の不動点を作図するエレガントな方法を図４に示したが，どうして私がこの方法を発見できたのか解説しておこう．

不動点の存在については，つぎのブラウワーの不動点定理が有名である．空間 X から X 自身への写像 f に対して, $f(x)=x$ を満たす点 $x \in X$ を f の不動点と言う．そして，任意の連続写像 f は，少なくとも１つの不動点をもつ．

この定理によって不動点が一般に存在することは明らかであるが，不動点を具体的に作図することは別問題である．

1980 年当時，日経サイエンスにジャール・ウォーカーの興味ある記事が掲載されていた．(2) ランダムにプロットした点群の図案を使って実験するさまざまな試みである．私が「西山の定理」を発見するヒントになったのはこの記事によることが大きい．

私はこの記事に触発されて，ランダム・ドット・パターンを作ってみた．(3) １辺が 20cm の正方形内に，2000 個の点を散りばめた．各点の (x,y)座標はコンピュータで乱数を発生させることで求め，その座標値をもとにプロッターで作図した．無秩序に並んだ点群の図案，これをランダム・ドット・パターンと呼んでいる（図５）．

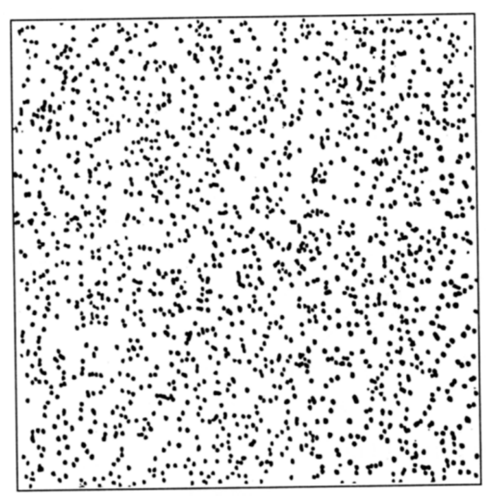


図５．ランダム・ドット・パターン

このパターンは，これだけでは何も面白くない．これを透明なビニール紙，たとえば OHP 用のフィルムに焼き付ける．焼き付けたフィルムをもとのパターンの上に重ね合わせる．これで準備は完了だ．上のフィルムを少し回転させる．するとどうだろうか．無秩序に並んだ点群の中から一瞬，同心円が浮かび上がってくるのだ（図６）．そして，この幻影を見た誰もは，この驚きに感動せざるを得ないだろう．同心円は１つできる．そして必ず１つである．同心円の中心に指をのせてフィルムを逆回転すれば，２つのパターンは完全に一致する．つまり同心円の中心は回転を施した中心軸であり，不動点であるのだ．

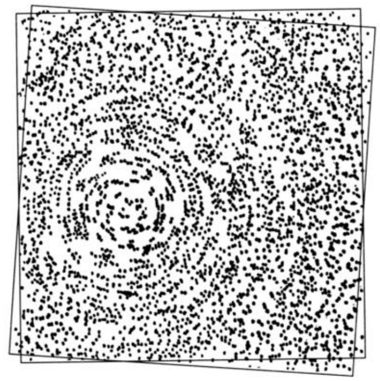


図６．不動点が見える

私は，このパターンが描き出す不思議な模様に魅了され一日中眺めていた．そして，同心円の中心が，正方形の各辺の交点を結んでできた２直線の交点と一致することに気づいたのである．

ところで，このような同心円が１つ，つまり不動点が見えるためにはどうして点群がランダムに配置されていなければならないのだろうか．その理由を説明するために，点群が規則正しく配置されたレギュラー・ドット・パターンを作ってみた（図７）．プロットした点群の数はランダムなときと同数の 2000 個とした．

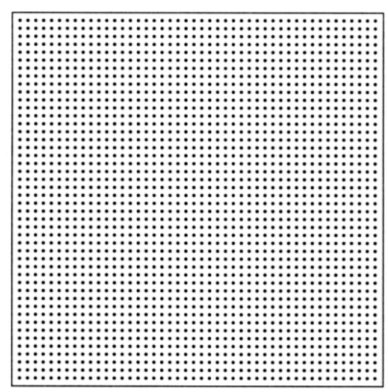


図７．レギュラー・ドット・パターン

レギュラー・ドット・パターンを OHP 用のフィルムに焼き付け，それを図案の上に重ね，フィルムを少し回転させた．規則的な場合は，いくつもの同心円が見えることになる（図８(1)）．さらに，フィルムの回転角度を大きくすれば，同心円の半径は小さくなるとともに同心円の個数が増えていく（同図(2)）．た

くさん見える同心円の中で，本当の不動点はこれらのうちの１個であり，それ以外はダミーである．点群が規則的に配置されているがゆえにこのような現象になるのである．同心円および不動点を１個だけ表示するには，点群はランダムに配置されていなければならない．

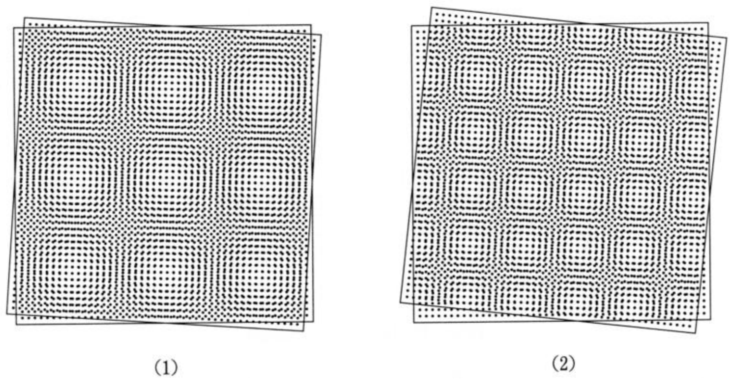


図８．いくつもの同心円が見える

３．円の不動点

重ね合わせの位置関係を図４に示したが，正方形は４辺が等しいので，これ以外にも３通りの配置が考えられる．そして，それぞれの配置に対して不動点が作図でき，重ね方は合計４通りの方法がある．これら４通りを図９(1)～(4)に作図しておこう．同図(2)と同図(3)は，対応する辺が交点をもっていないので，各辺を延長してその延長線上での交点を求めることで「西山の定理」を拡張した．

このようにして，正方形には４つの不動点が存在することがわかった．それらを P_1, P_2, P_3, P_4 とする．では，この４つの不動点はどのような位置関係にあるのだろうか．それは，４つの不動点は一直線上に並ぶのである．ちょっと不思議に思えるが，正方形に外接する円を描いてみると，これらの位置関係がよくわかる（図 10）．正方形の回転移動は外接円の回転移動に対応している．

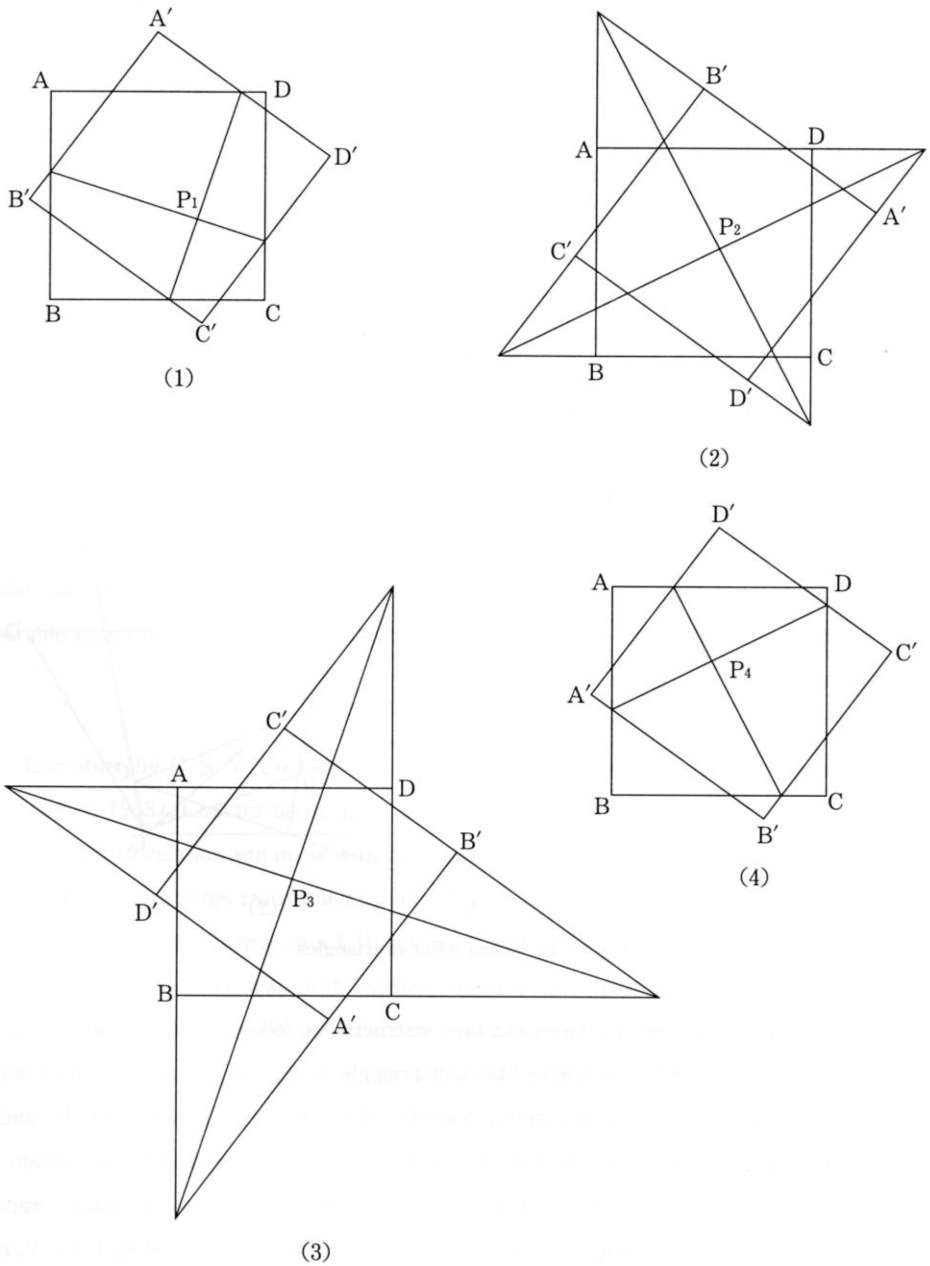


図９． ４つの不動点

正方形の不動点は４個あり，正８角形の不動点は８個ある．一般に正ｎ多角形は，ｎ辺が等しく重ね方がｎ通りあるので，ｎ個の不動点がある．これらの不動点は一直線上に並ぶことは正方形の場合と同じように，正ｎ多角形に外接

する円を描けば明らかである．

正ｎ多角形のｎを無限大にするとどうなるだろうか．それは円になる．円の不動点は無限個あり,それらは一直線上に並ぶ．言葉を変えて言うならば，合同な円の不動点は，2 円の交線上にあり，しかも，この交線上ならどこでも不動点になる．各自確かめよ．[4]

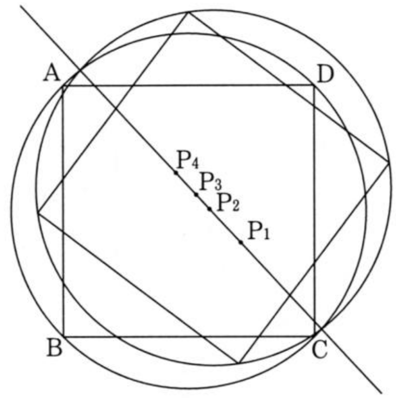


図 10.　4 個の不動点は一直線上に並ぶ

４．相似変換の不動点

相似変換は H.S.M.コクセターの文献に詳しく述べられている．[5]　その例として，拡大相似には写真の引伸し機やパンタグラフ（縮図器）が，らせん相似には縮尺の違う地図があげられている．1 万分の 1 の地図の上に，小さな 2 万分の 1 の地図をはみださないようにのせる．そしてその上に 4 万分の 1 の地図を同じ位置関係でのせる．このようにして，この操作を無限に繰り返せば，この極限が不動点になるというのである（図 11)．これは,「任意の連続写像は，すくなくとも 1 つの不動点が存在する｣というブラウワーの不動点定理の特別な場合である．

不動点が存在することがわかっていても，その不動点を作図することは別問題である．相似変換の不動点の作図は，合同変換において示した「西山の定理」が拡張される．下の長方形を ABCD,縮小された上の長方形を A′B′C′D′とする．上の長方形の各辺を延長して，下の長方形の対応する辺（または，その延長）との交点をとる．AB と A′B′の交点を P,BC と B′C′の交点を Q,CD と C′D′の交点を R,DA と D′A′の交点を S とする．この４つの交点から 2 本の対角線 PR,QS を引くと，この交点 O が不動点となる（図 12)．

交点 O が不動点になることの証明は,森原則男氏がつぎのように説明している．[6]　下の長方形 ABCD で，水平線を BC から AD まで動かす．すると上の長方形

A′B′C′D′では，水平線はB′C′からA′D′まで動くことに対応している．それぞれの水平線に対してお互いに対応する水平線があり，その2本の直線の交点の軌跡はQSとなる.一方,下の長方形ABCDの垂直線をABからDCまで動かせば,上の長方形 A′B′C′D′の垂直線は A′B′から D′C′まで動くことになり，その 2本の直線の交点の軌跡はPRとなる.不動点Oは水平方向も垂直方向もともに条件を満たさねばならないから，QSとPRの交点が求める不動点となる．

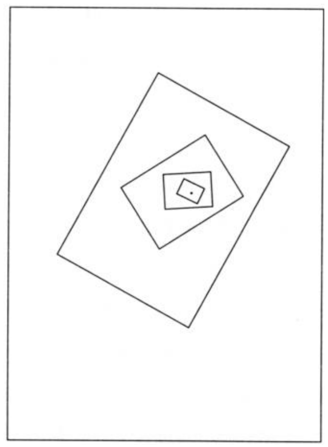


図 11. 相似変換の不動点

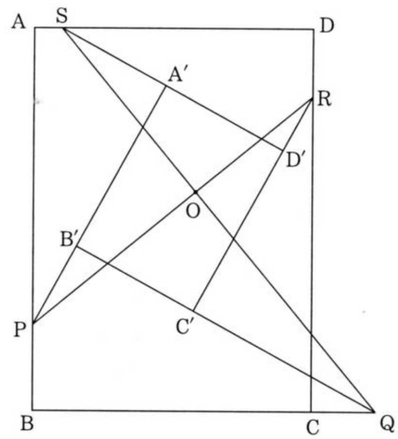
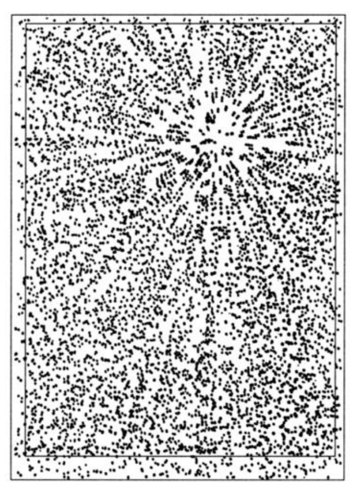


図 12. 不動点の作図

さて，相似変換の不動点もランダム・ドット・パターンを使って，その不動点を確認することができる．ランダム・ドット・パターンを OHP 用のフィルム

(1)らせん渦が見える



(2)放射状の模様が見える

図 13.

に縮小コピーして焼き付けるのだが，縮小比率は 90 パーセントまでが適当で，50 パーセントにすると不動点を確認することは難しい．

不動点は１つしか見えないが，合同変換の場合と比べると少し見え方が違っている．上のフィルムを少し回転させると，同心円ではなくらせん渦が見える，回転を右方向にすると右方向に吹き込むらせん渦が，回転を左方向にすると左方向に吹き込むらせん渦が見える．上のフィルムを平行移動すると不動点を中心に放射状の模様が見える（図 13）．

５．ランダム・ドット・パターンの作成方法

最近はパソコンがかなり普及しているので，プログラムを作ればランダム・ドット・パターンを簡単に作成することができる．ここでは，Visual BASIC 言語を用いた作成方法を説明しよう．乱数を発生させるためには，組込み関数 RND を用いる．RND は，(0,1)区間の一様乱数を自動的に計算してくれる．正方形の大きさを適当に決め，乱数を掛け合わせれば(x,y)座標が求まる．この場合は，正方形のサイズが WX＝8000,WY＝8000 で，Ｘ，Y に座標が求まる（表１）．

ドットを描かせるには，少し大きめの点がよいので,「＋」(プラス記号）を Line 文で作成し，点群の数は 2000 個とした．命令は全体でわずか 14 行である．以上のプログラムを RUN すれば，画面上にランダム・ドット・パターンが表示される．そこで，画面のハードコピーをとる．ハードコピーの縦，横の比率が等長な正方形になっていないなら，WX，WY を適当に微調整して修正するとよい．できあがったパターンは，OHP 用のフィルムに焼

```
Private Sub Command1_Click()
wx = 8000
wy = 8000
sx = 100
sy = 100
Line (sx, sy)-(wx + sx, wy + sy), , B
For i = 1 To 2000
X = Rnd * wx + sx
Y = Rnd * wy + sy
d = 30
Line (X - d, Y)-(X + d, Y)
Line (X, Y - d)-(X, Y + d)
Next i
End Sub
```

表 1. Visual BASIC プログラム

き付ける．焼き付けるための機器がない場合は，コピー機でフィルムに直接コピーしてもよい．このようにしてランダム・ドット・パターン一式が作成されたことになる．各自確かめよ．

参考文献

(1) 西山豊「折紙をそろえる」『数学セミナー』日本評論社,1982.2

(2) ジャール・ウォーカー「アマチュアサイエンス：ランダム・ドット・パターンとテレビのスノー・ノイズでの錯覚」『日経サイエンス』日本経済新聞社,1980.6

(3) 西山豊「不動点をお見せします」『数学セミナー』日本評論社,1982.8

(4) 西山豊「円を重ねる」『数学セミナー』日本評論社,1986.11

(5) H.S.M.コクセター，銀林浩訳『幾何学入門　第2版』明治図書,1965

(6) 岡部恒治「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』日本評論社,1989.4

初出「不動点を見せる」『数学セミナー』日本評論社，2002.2

詳しい証明に関しては次の記事を参考にすること。
西山豊「相似変換の不動点」『理系への数学』2008.2，Vol.41，No.2，4-7

（2010年11月25日更新）