

# ガウスの正 17 角形作図法

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: [nishiyama@osaka-ue.ac.jp](mailto:nishiyama@osaka-ue.ac.jp)

## 1. はじめに

私達は、数学史上の有名な定理については知っているが、その証明法については知らないということが多い。フェルマーの最終定理、ガロアの理論、ゲーデルの不完全性定理など、あげれば切りがない。私は、ガウスが証明した正 17 角形の作図法について、最近まで、その証明法を知らなかった。一般の正  $n$  角形についての作図法について、『数学辞典』（岩波書店）には次のような説明がある。正  $n$  角形の作図が可能のための必要十分条件は、 $n$  を素因数分解したとき、

$$n = 2^\lambda P_1 \cdots P_k \quad (\lambda \geq 0) \quad (1)$$

で、 $P_1, \dots, P_k$  は、すべて相異なる  $2^h + 1$  の形の素数（Fermat 数）となることである（C.F. Gauss）。この式に、 $\lambda$  や  $h$  の値を入れてみると、

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, \dots$$

などが求まる。

私は、ある論文に「C.F.ガウスが正 17 角形の幾何学的作図法を得たことは有名である」と引用したところ、「ところで、正 17 角形はどのように描くのですか」という問合せがあった。辞典の丸写しで、内容を知らなかったのだ。正 3 角形や正 5 角形の作図については、古代ギリシャのユークリッドの時代に確立されている。ところがこの正 5 角形の作図法についてすら、現代の我々が完全にマスターしているかという、それはあやしい。正 5 角形の作図法は、1 辺を固定した描き方と、円に内接する描き方の 2 通りがあり、ともに、分度器を使わずにコンパスと定規だけで描ける。本題ではないので説明を省略するが、

これらは,

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad (2)$$

または,

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \quad (3)$$

となる関係を応用したものである.

私は、代数学の専門家ではない. これから説明する内容は、ガウスの試みた正 17 角形の作図法について調べてみたという程度に理解していただきたい.

## 2. ガウスの日記から

高木貞治『近世数学史談』の第 1 章に、1796 年 3 月 30 日の朝、19 歳の青年ガウスが目ざめて臥床から起き出でようとする刹那に正十七角形の作図法に思い付いたとして、彼の日記がのせられている. それを要約するとつぎのとおりである.

正 17 角形の作図の可能性を証明するだけならば、簡単明瞭である.

$$360^\circ = 17\phi$$

としたとき、 $\cos \phi$  の値が平方根で表されるならば作図可能である.  $\cos \phi$  は単位円周上の  $x$  座標の値を示している. そして、ガウスは、その計算過程を示している. 説明を加えながら紹介していこう.

まず、ガウスは、つぎのように置く.

$$\cos \phi + \cos 4\phi = a$$

$$\cos 2\phi + \cos 8\phi = b$$

$$\cos 3\phi + \cos 5\phi = c$$

$$\cos 6\phi + \cos 7\phi = d$$

ここで注意すべきことは、 $\cos \phi$  から  $\cos 8\phi$  までを 4 つの変数  $a, b, c, d$  に置き換えていることである. このような置き換えは、これに限るのだろうか. アトランダムに設定するとすれば、組み合わせは、全部で  ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 = 2520$  通りある. ガウスは、すべての場合を検討したのだろうか. そうではない. この

ことは、後で詳しく見るが、円分方程式の理論と深く関係している。

つぎに、

$$a+b=e$$

$$c+d=f$$

とおくと、よく知られている通りに

$$[1] \quad e+f = -\frac{1}{2}$$

となる。

[1]式を理解するためには、大学受験の数学によくある問題を思い出せばよい。

(定理)

自然数  $n$  に対して、

$$S_n = \cos \phi + \cos 2\phi + \cdots + \cos n\phi$$

とおくと、

$$2S_n \sin \frac{\phi}{2} = \sin \frac{2n+1}{2}\phi - \sin \frac{\phi}{2}$$

が成立する。

定理の証明は、 $2 \cos k\phi \sin \frac{\phi}{2}$  ( $k=1, \dots, n$ ) について、積→和の公式を適用す

ると、途中の項が消去できて整頓される。そこで

$$S_n = (\sin \frac{2n+1}{2}\phi - \sin \frac{\phi}{2}) / 2 \sin \frac{\phi}{2}$$

に  $n=8, \phi = \frac{2\pi}{17}$  を代入すると

$$\sin \frac{2n+1}{2}\phi = 0 \text{ となる。よって } S_8 = -\frac{1}{2}.$$

そして、 $a, b, c, d$  の 2 項ずつの積をもとめている。

簡単なる計算によって、ただし  $\cos n\phi = \cos(17-n)\phi$  に注意して、

$$2ab = e + f = -\frac{1}{2}$$

$$2ac = 2a + b + d$$

$$2ad = b + c + 2d$$

$$2bc = a + 2c + d$$

$$2bd = a + 2b + c$$

$$2cd = e + f = -\frac{1}{2}$$

上の式で、例えば、 $2ab$ の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} 2ab &= 2(\cos \phi + \cos 4\phi)(\cos 2\phi + \cos 8\phi) \\ &= 2\cos \phi \cos 2\phi + 2\cos \phi \cos 8\phi + 2\cos 4\phi \cos 2\phi + 2\cos 4\phi \cos 8\phi \\ &= (\cos 3\phi + \cos \phi) + (\cos 9\phi + \cos 7\phi) + (\cos 6\phi + \cos 2\phi) + (\cos 12\phi + \cos 4\phi) \end{aligned}$$

ここで、 $\cos 9\phi = \cos 8\phi$ ,  $\cos 12\phi = \cos 5\phi$ と置き換えて整理すると、

$$\begin{aligned} &= (\cos \phi + \cos 4\phi) + (\cos 2\phi + \cos 8\phi) + (\cos 3\phi + \cos 5\phi) + (\cos 6\phi + \cos 7\phi) \\ &= a + b + c + d \\ &= e + f \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

ゆえに、

$$2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4a + 4b + 4c + 4d$$

すなわち

$$2ef = -2$$

または

$$[2] \quad ef = -1$$

これ以後は、2次方程式の解と係数の関係を用いた解法である。そこで[1]と[2]から、 $e$ と $f$ が方程式

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$$

の根、したがって一つは

$$= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}}, \text{ また一つは } = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{17}{16}}$$

前のが  $= e$  で、後のが  $= f$  であることは数値からすれば、一見して分かる。

さて  $a$  と  $b$  は方程式

$$x^2 - ex - \frac{1}{4} = 0$$

の根であるから、その値は

$$\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} \pm \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

ここでは上の符号が  $a$ 、下の符号が  $b$  に対するものであることは明らかである。なぜなら

$$a - b = (\cos \phi - \cos 2\phi) + (\cos 4\phi - \cos 8\phi)$$

は無論正であるから、まったく同様に

$$c = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

$$d = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

さて、最後に  $\cos \phi$  と  $\cos 4\phi$  は明らかに次の 2 次方程式の根である（積

$$\cos \phi \cdot \cos 4\phi = \frac{1}{2}c \text{ だから）,}$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}c = 0$$

ゆえに

$$\cos \phi = +\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

$$\cos 4\phi = +\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}c}$$

しかるに

$$2a^2 = 2 + b + 2c$$

になるから

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\end{aligned}$$

これが、ガウスがもとめた  $\cos\phi$  の値である。

### 3. ガウスの円分方程式論

このようにして、正 17 角形の作図に必要な  $\cos\phi$  の値が求まった訳であるが、これは、ただ検算しただけであって、なぜそうなるのかの本質的なことについては、まだ何も触れていないことになる。つまり、 $\cos\phi$  から  $\cos 8\phi$  までを 4 つの変数  $a, b, c, d$  で置き換えたことの意味について述べなければならない。

その理由は、「ガウスの日記」には書かれていない。そのことを知るには、倉田令二郎『ガウス円分方程式論』や、高瀬正仁訳『ガウス整数論』の力を借りなければならない。方程式、

$$x^n - 1 = 0 \quad (4)$$

を考えてみる。この方程式の根はいうまでもなく 1 の  $n$  乗根であり、よく知られているように

$$e^{\frac{2\pi ki}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

である。このとき、オイラーの公式より

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (5)$$

の関係がある。

$n$  個の根の中で、 $n$  乗してはじめて 1 になるものを原始  $n$  乗根という。 $e^{\frac{2\pi i}{n}}$  は、

1 の原始  $n$  乗根であるが、これは複素平面で単位円周上の偏角が  $\frac{2\pi}{n}$  の点、す

なわち全円周の  $n$  等分点を表し、 $e^{\frac{2\pi ki}{n}}$  は、その  $k$  倍の偏角をもつ円周上の点を

表す。

こうして複素平面を媒介にすることによって、方程式(4)は、正  $n$  角形という古代ギリシャ以来の図形と結びつくことになる。これがガウスの基本的視点であり、複素平面を導入したのはガウスが最初の数学者であった。

さて、(4)式は、

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

だから、(4)の 1 以外の根はすべて

$$F(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \quad (6)$$

の根となる。これを円分方程式あるいは円周等分方程式という。

$x^n - 1 = 0$  において、原始  $n$  乗根  $\omega$  が既知ならば、この方程式の解は、

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$$

となる。たとえば、 $x^3 - 1 = 0$  について考えてみると、

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

であるから、3つの根は  $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  となる。 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \omega$  とすると、

$\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \omega^2$  となり、根が  $1, \omega, \omega^2$  となっていることを確認できる。この場合、

$3\theta = 2\pi$  であり、

$$\omega = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$\omega^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = e^{i2\theta}$$

$$\omega^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = e^{i3\theta} = 1$$

となり、3つの根は巡回していることがわかる。

ここで、剰余の考え方をういたつぎの定理を示しておこう。

**(定理)**

$p$  を素数とするとき、円分方程式

$$F(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

の根の集合を  $\Omega$  で表すと、 $r \in \Omega$  は 1 以外の  $x^n - 1 = 0$  の根ですべて複素数である。そして、 $e$  は  $p$  で割り切れない正負の整数とすると、

$$(1) \quad r^p = 1, r^{2p} = r^{3p} = \cdots = 1, r^{ep} = 1$$

(2)  $\lambda, \mu$  を整数とするとき

$$\lambda \equiv \mu \pmod{p} \Leftrightarrow r^\lambda = r^\mu$$

(3)  $r \in \Omega$  とすれば,

$$\Omega = \{r^e, r^{2e}, \dots, r^{e(p-1)}\}, \quad r^e + r^{2e} + \dots + r^{e(p-1)} = -1$$

が成り立つ. そして, ガウスは  $f$ -項周期というものを定義する.

(定義)

$p$  を奇素数,  $r$  を 1 の原始  $p$  乗根,  $p-1 = fe$  とし,  $g$  を  $p$  の原始根とする.  
 $\lambda$  を任意の整数として,  $f$ -項周期  $(f, \lambda)$  を次のように定義する.

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda h] + [\lambda h^2] + \dots + [\lambda h^{f-1}] \quad (\text{ただし } h = g^e)$$

ここで, 正 17 角形の場合について計算してみよう. 素数 17 の原始根を 3 とすると,

$$p = 17, p-1 = 16 = 16 \times 1 = f \times e, g = 3, h = g^e = 3^1 = 3$$

となり, 16 項周期は,

$$(16, 1) = [1] + [3] + [9] + [10] + [13] + [5] + [15] + [11] + [16] + [14] + [8] + [7] + [4] + [12] + [2] + [6]$$

となる. つまり,  $\{[1], \dots, [16]\}$  は, 原始根を 3 としたとき, 17 を法とした巡回群となっている. たとえば, 上式右辺の第 4 項  $[10]$  は,

$$\lambda h^3 = 1 \times 3^3 = 27 = 10 \pmod{17}$$

のようにして求められる. 原始根, 法, 巡回群などの用語の説明は, 代数学, 整数論, 群論などの専門書に委ねる.

それにしても, 素数と原始根の関係は実にうまくできている. 私が原始根という言葉を知ったのは, コンピュータで擬似乱数を発生させるサブルーチンを勉強したときのことである. これによって, コンピュータが表現するすべての整数をランダムに巡回する数列を生成することができるというのだ. 今回の問題も, 16 個の根を, 剰余の考え方にもとづき並び変えたことが大きなポイントになっている. このようにして, 16 項周期が求められたわけであるが, ガウスは  $f$ -項周期を分解する定理を示している.

(定理)

$p-1 = abc$  のとき,  $bc$ -項周期  $(bc, \lambda)$  は  $b$  個の  $c$ -項周期の和になる.

$$(bc, \lambda) = (c, \lambda) + (c, \lambda g^a) + (c, \lambda g^{2a}) + \dots + (c, \lambda g^{a(b-1)})$$



参考文献 (2) の 27~28 ページを参考にして 16 項周期を 2 個の 8 項周期に分解することを試みてみよう.

$p = 17, p - 1 = 16 = 1 \times 2 \times 8 = a \times b \times c$  より

$$(16, 1) = (8, 1) + (8, 3)$$

となる.  $(8, 1)$  と  $(8, 3)$  は定義により,

$$\begin{aligned} (8, 1) &= [1] + [9] + [9^2] + [9^3] + [9^4] + [9^5] + [9^6] + [9^7] \\ &= [1] + [9] + [81] + [729] + [6561] + [59049] + [531441] + [4782969] \\ &= [1] + [9] + [13] + [15] + [16] + [8] + [4] + [2] \pmod{17} \\ &= [1] + [2] + [4] + [8] + [9] + [13] + [15] + [16] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8, 3) &= [3] + [3 \cdot 9] + [3 \cdot 9^2] + [3 \cdot 9^3] + [3 \cdot 9^4] + [3 \cdot 9^5] + [3 \cdot 9^6] + [3 \cdot 9^7] \\ &= [3] + [27] + [243] + [2187] + [19683] + [177147] + [1594323] + [14348907] \\ &= [3] + [10] + [5] + [11] + [14] + [7] + [12] + [6] \pmod{17} \\ &= [3] + [5] + [6] + [7] + [10] + [11] + [12] + [14] \end{aligned}$$

となる.

これで, 16 項周期  $(16, 1)$  は, 2 つの 8 項周期  $(8, 1)$  と  $(8, 3)$  に分解されたことになる. 分解する定理をつぎつぎと適用していけば, 最終の 1 項周期まで分解することができる. そして, 分解の過程を一覧表にすると表 1 のようになる.

「ガウスの日記」に示されていた  $a, b, c, d, e, f$  の変数と  $\cos \phi$  から  $\cos 8\phi$  をこの表に併記しておいた. このことで, ガウスが

$$\begin{aligned} \cos \phi + \cos 4\phi &= a, \cos 3\phi + \cos 5\phi = c \\ \cos 2\phi + \cos 8\phi &= b, \cos 6\phi + \cos 7\phi = d \\ a + b &= e, c + d = f \end{aligned}$$

と置いた理由が理解されるであろう.

このようにして,  $p = 17$  のときの 1 以外の 16 個の根は表 2 のように計算される. 図 1 に正 17 角形の概略図を示しておく. このような分解が,

$$x^{17} - 1 = (x - 1)(x^{16} + x^{15} + \cdots + x + 1)$$

の右辺の第 2 項を因数分解できることになるのだが, なぜそうなるのかは現在の私には分からない. このことを知るにはさらに詳しく勉強しなければならない

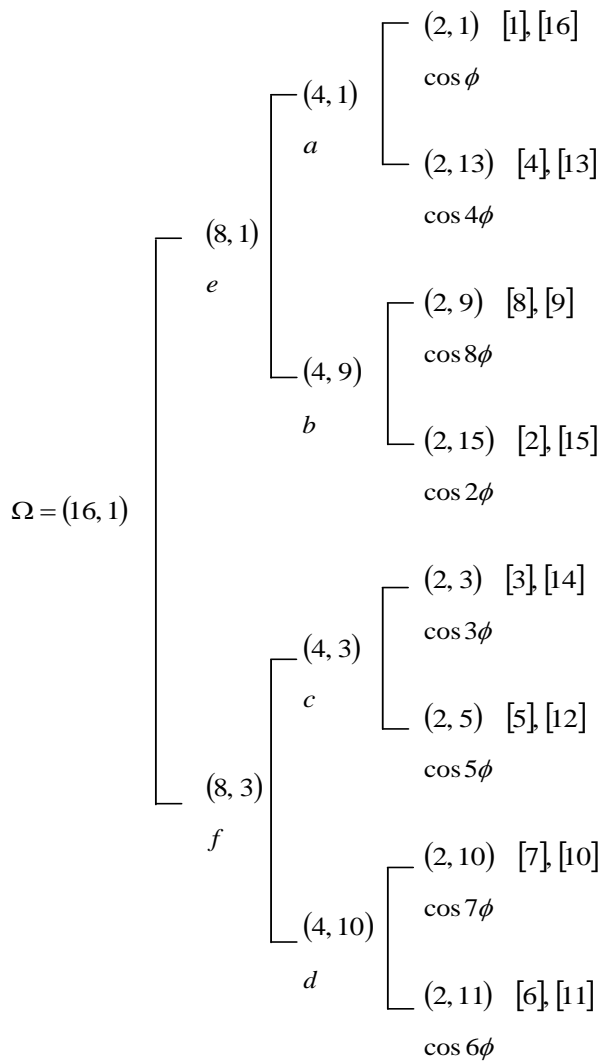


表 1.  $f$ -項周期の分解過程

いが、そこには代数学の奥深い美しさが存在するだろう。私は、その美しさの一端を垣間見た気がした。

[1], [16]	$0.9324722294 \pm 0.3612416662i$
[2], [15]	$0.7390089172 \pm 0.6736956436i$
[3], [14]	$0.4457383558 \pm 0.8951632914i$

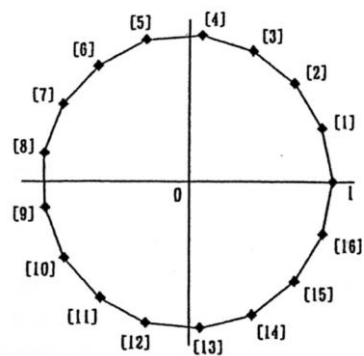


図 1. 正 17 角形と根の関係

[4], [13]	$0.0922683595 \pm 0.9957341763i$
[5], [12]	$-0.2736629901 \pm 0.9618256432i$
[6], [11]	$-0.6026346364 \pm 0.7980172273i$
[7], [10]	$-0.8502171357 \pm 0.5264321629i$
[8], [9]	$-0.9829730997 \pm 0.1837495178i$

表 2. 16 個の根

#### 4. ルートの作図法など

$\cos\phi$  の値が根号で表されたわけだが、具体的に作図することを考えてみよう。数学でいう作図問題とは、コンピュータで数値計算し、その概略図を描くことではない。平面上に 2 点 (0 点と 1 点、つまり線分) が単位量として与えられているとき、これと、コンパスと定規だけで作図するのである。定規は直線を引くためにだけ使い、計測の機能は無いとする。

そこで、根号の長さをどのようにして作図するのが問題になる。根号 (ルート) の長さは図 2 に示すように、すべて作図可能である。まず、1 辺の長さが 1 の正方形を描く。すると、「三平方の定理」より対角線の長さは  $\sqrt{2}$  となる。そこで  $\sqrt{2}$  を半径として円弧を描き、その長さを正方形の底辺の延長線上に移す。すると、たての長さが 1、横の長さが  $\sqrt{2}$  の長方形ができる。

この長方形に、また「三平方の定理」を適用すると、対角線の長さは  $\sqrt{3}$  となる。このようにして求めていけば、 $\sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$  の長さが求まることになる。この方法で行けば、 $\sqrt{17}$  の長さの作図はクリアできたことになる。

つぎに、整数のルートではなく、任意の数値のルートの作図について考えてみよう。それは参考文献 (2) の 50~51 ページに詳しい。そこには、分数  $\left(\frac{a}{b}\right)$

とルート ( $\sqrt{a}$ ) の作図の説明がある (図 3, 図 4)。約 200 年前 (1796 年) に C. F. ガウスが発見した正 17 角形の作図法は、コンピュータがこれだけ発達した現代においてすら、新鮮な感動を与える。私は、ガウスの思考力や創造力の素晴らしさを再確認するだけだった。

参考文献

- (1) 高木貞治『近世数学史談・第3版』共立出版, 1987
- (2) 倉田令二郎『ガウス円分方程式論』河合文化教育研究所, 1988
- (3) C. F. ガウス, 高瀬正仁訳『ガウス整数論, Disquisitiones Arithmeticae』朝倉書店, 1995
- (4) 西山豊「ガウスの正17角形作図法」『大阪経大論集』大阪経済大学, 1997.5

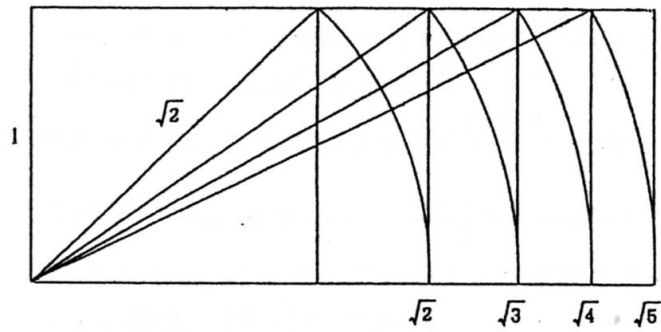


図 2. 根号 (ルート) の長さ

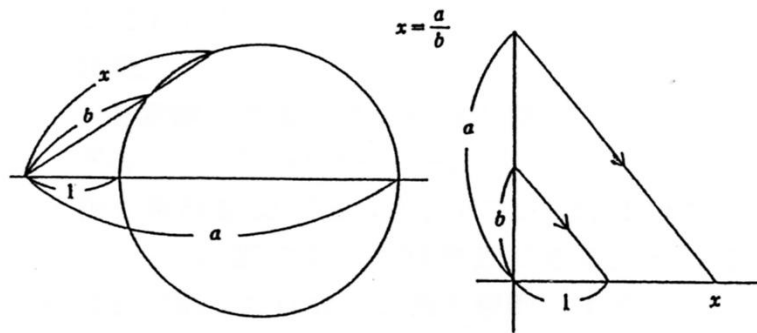


図 3. 分数 ( $\frac{a}{b}$ ) の作図

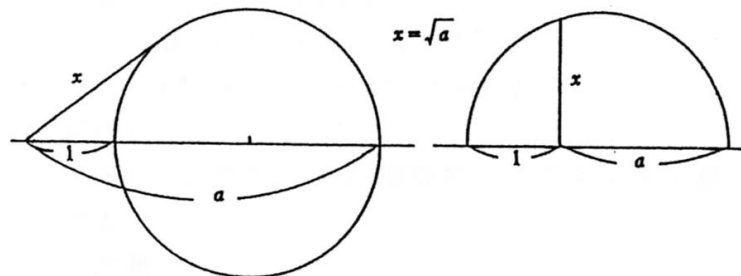


図 4. ルート ( $\sqrt{a}$ ) の作図