たたみかえの数理

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　経営情報学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

１．　裏表のない平面

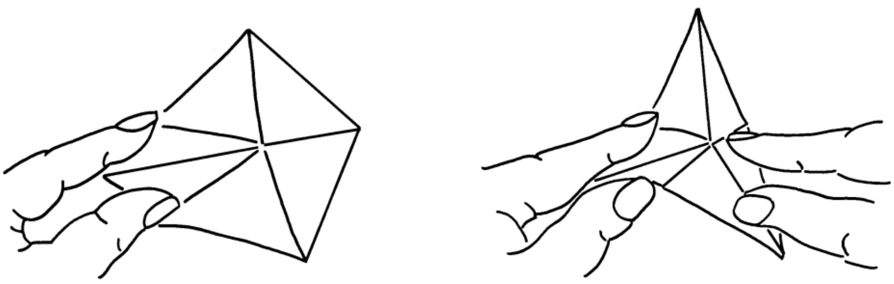
私は，『BASIC 数学』1990 年 12 月号に「折り紙六角形」というタイトルでヘキサフレクサゴンという手作りパズルの紹介をした(1)．あれから 10 数年になるが，このパズルについて理論的にもかなり進んで理解でき，また実際においても新しい折り方を実現できるようになった．そこで，このパズルを知らない読者のために紹介するとともに，このパズルが数学と密接につながっていることを説明したい．

このパズルはイギリスの数学者アーサー・ストーン（Arthur H. Stone）が 1939 年に考案したもので，ヘキサフレクサゴン（hexaflexagon）という名前がついている．ヘキサフレクサゴンという名前がなじまないのか，「オリガミ六角形」または「たたみかえ折り紙」と邦訳されているが，これらは皆このパズルのことを言っているのである．

ヘキサフレクサゴンのヘキサ（hexa）とは 6 のことで，フレクサゴン（flexagon）とはフレキシブル（flexible）なもの，曲げやすいもの，いろいろな形になるものの意味である．フレクサゴンには六角形以外のものもあり，たとえばテトラフレクサゴン（tetraflexagon）は四角形のものだが，理論的にも実践的にも面白いのはヘキサフレクサゴンのほうである．

私がこのパズルの面白さを知ったのは 1985 年で，『数理科学』に掲載された池野信一の記事である(2)．日本になかったパズルかというとそうでもなく，古くからある玩具「びょうぶがえ」に類似している．このパズルは紙製のもので六角形のかたちをしている．その六角形は 6 つの三角形で構成されていて，図

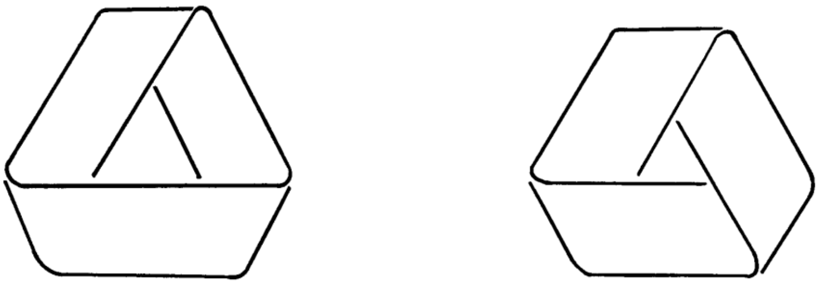
１のように親指と人差し指で隣接する２つの三角形をつまむと，真ん中から新しい面が現れてくるのだ．



(1)　　　　　　　　　(2)

図１．新しい面の出し方

図２はトポロジー（位相幾何学）でいう裏表のない平面についての説明図である．普通の帯を 180 度ひねってノリづけしたのがメビウスの帯とよばれるもので，ドイツの天文学者メビウス（A. F. möbius, 1790-1869）が考案したものである．ひねりの向きは右ねじ，左ねじのどちらの向きでもよく，裏と表の区別がなくなりつながった平面となる．メビウスの帯は 180 度ひねっているが，ヘキサフレクサゴンは 540 度ひねってできている．540 度は 180 度の３倍である．一般に 180 度の奇数倍ひねってノリづけすると裏表のない平面になり，偶数倍ひねると裏表のある平面になる．



(1)メビウスの帯(180 度ひねり)　(2)ヘキサフレクサゴン（540 度ひねり）

図２．裏表のない平面

２．基本の３面折り

さて，ものごとは基本が大切である．ヘキサフレクサゴンの３面折りは基本中の基本であるので，読者はこの３面折りを完全にマスターして欲しい．

一辺が６センチの正三角形を図 3(1)のように横に 10 個並べる．この程度の図ならコンパスと定規で描けるはずだ．10 個の三角形の右端のものはノリづけのためにあるので，実際は９個の三角形がパズルに関係している．三角形は裏表の２面あるから，９×２＝18 で合計 18 個の三角形があることになる．一方，フレクサゴンの六角形は三角形が６個でできているから，18÷６＝３で３面折りのものができることが数字の上からはなりたつ．

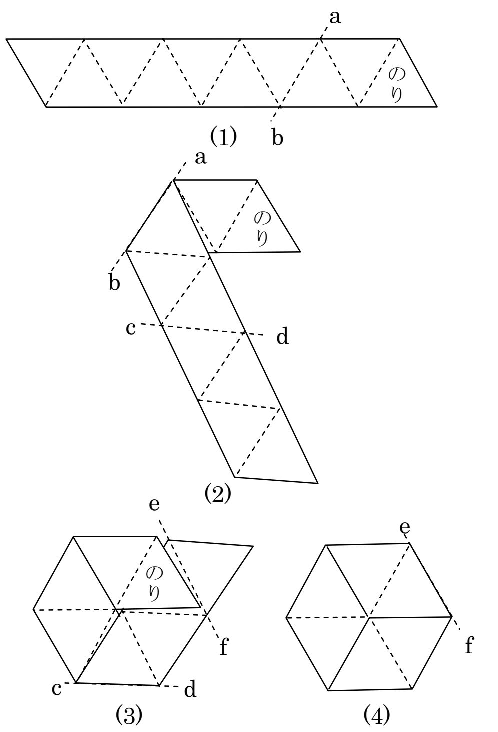


図３．折りたたみの手順（３面折り）

数字の上で勘定が成り立っても，三角形がどういう配置になっていればよいかが肝心であるが，その説明は後述するとして正しい折り方だけを説明しておこう．$a-b$の線にそって谷折りし（図 3(2)），$c-d$ の線にそって谷折りし（図 3(3)），＜のり＞の下をくぐらせて$e-f$ の線にそって谷折りして，のりづけをする（図 3(4)）．谷折りを３回したことになるから$180度\times 3=540度$ひねったことになる．

のりづけしたヘキサフレクサゴンを図１のように隣接する２つの三角形をつまんでいくと，真ん中から新しい面が自然と現れてくる．もし出てこなかったら，無理に引っ張らずに三角形をひとつづらして（中心角で 60 度）みることだ．それでも出てこないようだったら，作り方が間違っているので図３にしたがってもういちど作り直してほしい．

ヘキサフレクサゴンが正しく動作するかを確認しておこう．そのためには六角形の面に数字

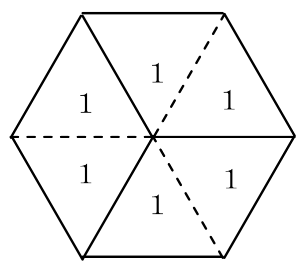


図４．数字を記入

を記入していく（図４）．最初の面を「１」とし，つぎに現れた面を「２」，そのつぎに現れた面を「３」とする．これらは１→２→３→１→２→３というように３つの面がサイクリックに現れるのが特徴である．

記入した１から３の数字が，実際どのような配置になっているかを知ることは興味のあるところだ．いったん作成したヘキサフレクサゴンのノリをはがして展開したものが図５である．数字の(1)，(2)，(3)は紙片の裏側に記入された数字を示している．同じ数字は連続した領域にあるのではなく，２つずつのペアが裏表に等間隔に並んで配置しているのだ．また，図１の折りたたみとの関係でいえば，折りたたみの操作が一回につき図５では三角形が２個分ずれることになる．つまり，ヘキサフレクサゴンはひとつの細長い帯状の平面をずらしながら見ていることになる．

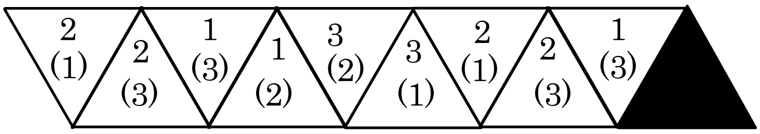


図５．３つの面の関係

３．マーチン・ガードナーの型紙より

1990 年に本誌で紹介した記事は以上の３面折りについてだけであった[(1)]．私の興味と関心はもっと多くの面の折り方ができないかに移っていった．

マーチン・ガードナーの『現代の娯楽数学』にはヘキサフレクサゴンの紹介記事があり, この本の 25 ページに４面折りから７面折りまでの型紙がのせてある[(3)]．この本には型紙の図が掲載されているだけで折り方の説明はなかった．解答がのっていないから自力で解かねばならない．ああでもないこうでもないと失敗を何度も繰り返しながら私はそれらを実現できた．

ヘキサフレクサゴンの多面折り（$n \geq 4$）を実現するには面の数が多くなればなるほど，理論だけではなく実際に作成する用紙，作図法などの技術が問題になってくる. 最初にパズルを知った 1985 年ころは，画用紙にコンパスと定規で作図していた．３面折りだけならこれでよいが，面の数が多くなると作図の精

度が要求される．鉛筆の芯は 0.3 ミリ，定規の目盛は１ミリ単位であるので，いくら慎重に作図したとしても手書きによる誤差は最低 0.1 ミリはあるだろう．１つの三角形の誤差が 0.1 ミリであったとしても,三角形が 10 個になると誤差が蓄積されて１ミリになってしまう.もし 12 面折りを作成するなら三角形の数が 37 個になるので，誤差は 3.7 ミリとなり無視できなくなる．また，当初，画用紙を使っていたが，画用紙は強いようで意外と駄目である．何度も折り曲げているうちに破れてしまうのだ.

このような経験から作図はコンパスと定規をあきらめ，パソコンを使って Visual Basic 言語で作成するようにした．パソコンの場合は手書きの誤差 0.1 ミリと誤差の蓄積 3.7 ミリはでてこず，かなり正確である．また画用紙は折り曲げに弱いので，普通のコピー用紙で作ることにした．コピー用紙は薄いが意外と強い．材質の繊維が違うのだろう．また，面を区別するために最初は数字を記入していたが，次第に色分けしたほうがアピールすることに気づき色鉛筆で色を塗るようになるが，コピー用紙が薄くて裏まで色がうつってしまうので，色紙（色つきの折紙）をノリで張ることにした.

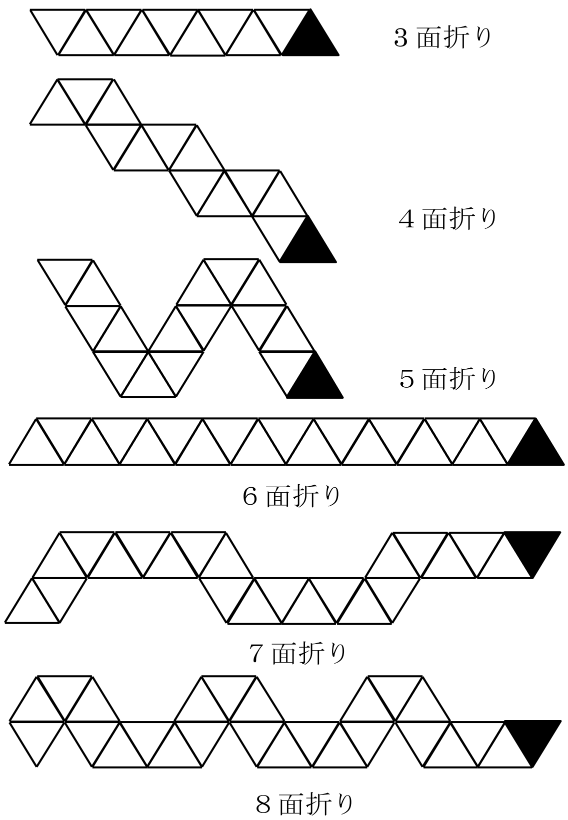


図６．３面折りから８面折りまで（型紙）

４．基本系列への退化

さて，私が４面折りから８面折りまでをどのように実現できたかを説明しよう．型紙について代表的なものを選び図６のように整理した．黒色の三角

形はのりしろに対応するもので，実際の面の現われには関係しない．

６面折りは比較的やさしいので，これから始めることにする．３面折りの型紙（図３(1)）を単純に２枚横につないでノリづけしたのが６面折りの型紙だ．三角形の数は 18 個であり，それにノリしろの１枚（黒色）がついた合計 19 枚である．右ねじの法則で右端から規則的に折っていけば３面折りの型紙と同じになる．この状態から３面折りを適用すれば６面折りが完成する．

３面折り，６面折りの型紙のように細長い真っすぐな紙片のことをジョセフ・マダチーはストレート・モデル（straight models）とよんでいる[4]．このストレート・モデルは次式で成り立つ．

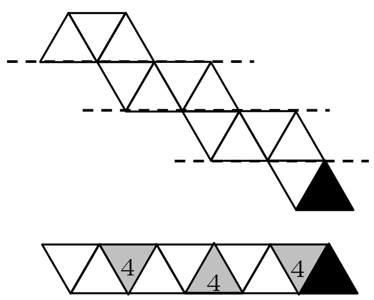
$n = 3 \times 2^{p}$，$(p \geq 0, 1, 2, \ldots)$

p に値を代入すると $n = 3, 6, 12, 24, \ldots$ となり，３面折り，６面折り，12 面折り，24 面折りがこの方法で可能だということだ．そして $n = \infty$，つまり面の数が無限のものも理論的には可能だということになる．

これ以外のものは，このストレート・モデルの基本系列に退化するというのが基本である（図７）．その折り方については４面折りと７面折りについて次に示しておこう．

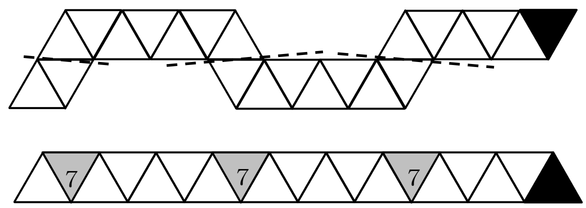
４面折りは，３箇所の点線のうち下から順番に右ねじの法則で３回折っていくと３面折りの型紙となる．重なり部分を灰色で示し，その部分は新しい面を構成するので「４」と記入した．（重なり状態）に３面折りを適用すれば４面折りが完成する．

（４面折り→３面折り）



４面折り（重なり状態）

（７面折り→６面折り）



７面折り（重なり状態）

図７．基本系列への退化

７面折りは，３箇所の点線のうち右端から順番に右ねじの法則で３回折っていくと６面折りの型紙となる．重なり部分に数字の「７」を記入した．この６面折りの型紙から３面折りの型紙までもっていき，それに３面折りを適用すればよい．つまり，７面折り→６面折り→３面折りという手順になる．

５．推移図

以上のように折りたためば，目的の面の数だけ出てくるのは確かだ．ところで面が出てくる順番はどのようになっているのだろうか．それには図８に示す推移図を参考にするとよい．この図はジョセフ・マダチーの文献を参考にして私が作成したものである[4].

３面折り（$n=3$）の場合は，推移図が三角形で表現される．三角形の頂点に記入した数字の１，２，３は面の番号である．三角形の内部にプラス（＋）記号を記入したが，これは面の番号が１→２→３というように反時計回りに循環するということである．

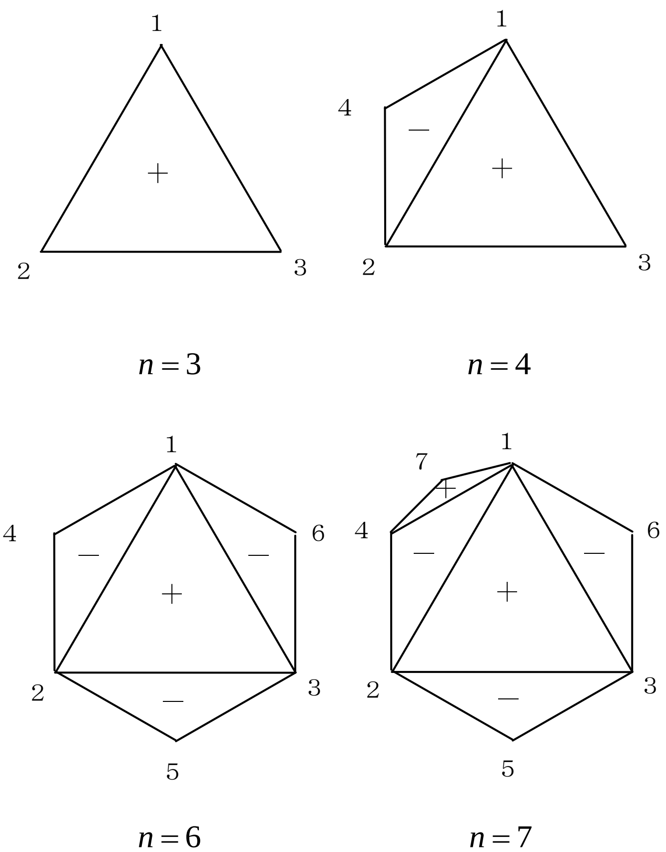


図８．推移図

４面折り（$n=4$）の場合は，3 面折り（$n=3$）の推移図に頂点１から頂点２に至る辺に新しい三角形が追加される．それは新しい面の数字４が関係する三角形である．この三角形の内部にマイナス（－）記号を記入

したが，これは面の番号が１→２→４というように時計回りに循環するということである．４面折りの場合は１→２→３のプラス（＋）循環と，１→２→４のマイナス（－）循環の２つが存在するということだ．たとえば，３から４に行くには３→１→４のように直接行けないので，１→２→３のプラス（＋）循環で３→１→２と進み，１→２→４のマイナス（－）循環で２→４と進み４に到達する．この場合，２は中継点となっている．

６面折り（$n=6$）の場合は，3 面折り（$n=3$）の推移図に３つの三角形が追加される．１→２→３のプラス（＋）循環のまわりに，１→２→４，２→３→５，１→６→３の３つのマイナス（－）循環が存在する．

７面折り（$n=7$）の場合は，６面折り（$n=6$）の推移図の外側に１→７→４のプラス（＋）循環の三角形が追加される．

このようにn面折りにはn多角形の推移図が対応し，n多角形は$n-2$個の三角形に分割され，隣り合わせる三角形の符号（循環の向き）は互いに異なるのである．推移図を作成しておくと，任意の面を出す作業がスムーズになる．

６．多面折りの一般解

図６では３面折りから８面折りまでの型紙を，図７では折り方の概略を説明したが，９面以上の折り方についてはどうすればよいのだろうか．ここでは９面以上の型紙をどのように作ればよいのかを説明していこう．

まず，ストレート・モデルの基本系列が存在することは前述したとおりである．$n=3\times2^p$，$(p\geq0,1,2,\ldots)$で表されるもので，$n=3,6,12,24,\ldots$である．12 面折り，24 面折りは横に細長い紙片の型紙となる．では，これ以外のnについてはどうなるのか．それは基本系列への退化で説明したように，７～11 面折りの場合は６面折りをベースに，13～23 面折りの場合は 12 面折りがベースになる．

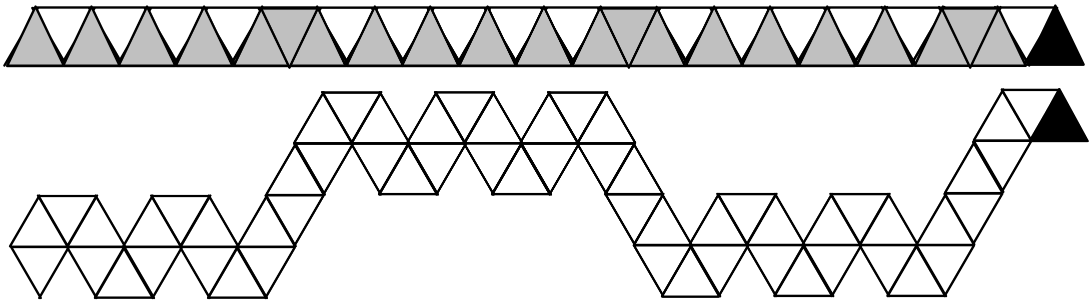


図９．　19 面折りの型紙

このベースになるストレート・モデルの上に（重なり状態）となる灰色の部分を描き，それをもとに逆展開していくと求めるｎ面折りの型紙ができることになる．詳しくは参考文献(6)を参照のこと．

私はこのようにして，$9 \leq n \leq 24$ のすべての n について型紙が作図でき，それを折って動作確認したところ理論どおりであった．簡単なものから済ませていったが 19 面折りは最後まで未解決だった．$n = 19$ というのが素数であるので不可能ではないかと悩んだが，試行錯誤するうちに灰色の位置がきまり，その展開図をつくると蛇のような形となった（図９）．

以上は，$3 \leq n \leq 24$ について可能であることを示しただけであって，任意の n について数学的な証明をしたわけでもない． $n \geq 25$ についてもこつこつと検討していけば恐らく問題ないであろうが，実際にものを作って確認作業をすることは大変であり，これが限界であると思う．

型紙をコンパスと定規で描くという方法は時間もかかるし誤差もでてくる．そこで，すべての型紙に適用可能な万能型紙を作成した（図 10）．これは Visual Basic で約 30 行の命令で作成できる．この万能型紙から n 面折りに必要な型紙をはさみで切り取ればいいのである．

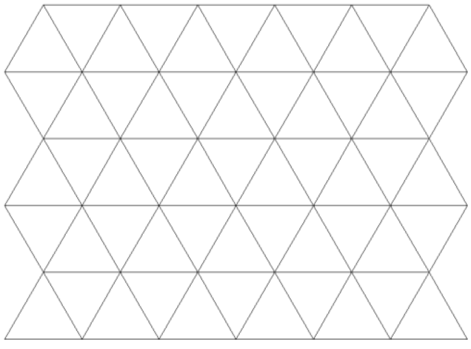


図 10．Visual Basic による万能型紙

ヘキサフレクサゴンは，まず３面

折りの現象をみて感動する．そして４面折りができるだろうかと考える．４面折りができると５面折りや６面折り，そして任意のn面折りは可能だろうかと考える．これらの思考の過程は「拡張」,「一般解」,「連続性」,「同値，同型」といった数学で行う手法に似ている．基本の３面折りでも感動は十分に伝わるので，このパズルを経験していない読者は是非とも試していただきたい．

参考文献

(1) 西山豊「折り紙六角形」『BASIC 数学』1990.12

(2) 池野信一「たたみかえ折り紙」『別冊：数理科学，「パズル」Ⅳ』サイエンス社，1979，78-82

(3) M.ガードナー著，金沢養訳「オリガミ六角形」『現代の娯楽数学』白揚社，1960，13-28

(4) Joseph S. Madachy，Madachy’s Mathematical Recreations，Dover，1979

(5) 西山豊「オリガミ六角形の多面折り」『大阪経大論集』vol.50，no.1，353-378，1999.7

(6) 西山豊「ヘキサフレクサゴン（Hexaflexagon）の一般解」『大阪経大論集』vol.54，no.4， 153-173，2003.11