

裏返す

西山豊

〒533-8533 大阪市東淀川区大隅 2-2-8 大阪経済大学 経営情報学部

Tel: 06-6328-2431 E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

1. キューブ・パズル

2005 年 4 月から 1 年間、在外研究でイギリスのケンブリッジ大学に滞在することになった。教養部にあたるセントエドマンズ・カレッジに訪問フェローとして在籍するとともに、大学の学部にあたる **Centre for Mathematical Sciences** へ通い、その研究室で仕事をしている。ここは、日本では理学部の数学科と物理学科の理論コースが合併したようなところで、同じ建物にスティーヴン・ホーキングの研究室がある。

私はこれまで長期間の海外滞在を経験したことがなく、見るものすべてが興味を持ってみる事ができる。また、がんらい方向音痴なので道を間違えたり、バスに乗り間違えて見当違いの方向にいたりしたこともあったが、1 ヶ月がすぎようやく落ち着いた。道に迷ったころ、これでは駄目だ、地図をもらおうと思って旅行案内所に入ったところ、面白い木製のキューブを見つけた(図 1)。

ケンブリッジは人口 10 万人の小さな大学街であるが、31 のカレッジ群と大学の学部と研究所などで構成され、大学の端から端までは歩ききれない広いところである。キングス・カレッジ、セント・ジョンズ・カレッジ、ラウンド・チャーチ、聖メアリー教会、ヘンリー 8 世像、フィッツウィリアム博物館、ケム川にかかる数学橋、ため息橋などの建造物は中世から保存されているものが多く、大学に通う学生だけでなく、休日は観光客でにぎわっている。それぞれの



図 1. キューブ・パズル

カレッジはボックスとよばれる広大な芝生の敷地を持っていて、学生たちはそ

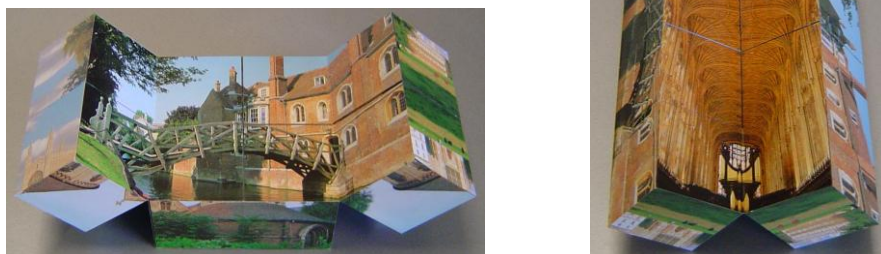


図 2. キューブの折りたたみ

こを散歩するなり寝転ぶなりしている。時間がゆっくりと流れている！私はそのように感じた。

キューブにはこれら観光地の写真が立方体の表面に貼り付けてある。6つの面に単純に貼り付けているのではなく、このキューブは図2のように縦、横いろいろな方向に折りたたむことができてつぎつぎと違った写真を見ることができる。正方形の写真が6枚、正方形を2つつなげた写真が3枚の合計9枚の風景であった。折りたたみの構造が面白いので、ひとつ購入して宿泊先に持って帰った。

風景の写真が9枚とは変な数字だ。でもこの理由はすぐにわかった。正方形の写真の大きさに計算しなおすと $6 + 3 \times 2 = 12$ 枚となる。立方体は面の数が6であり、6を2倍すると12となる。これで写真の枚数12と一致する。12がパズルの構造に関する数字でありそうだということがわかった。キューブの構造がどのようになっているかを調べてみた。まず基本単位として1辺が3.5センチの立方体がある。この立方体が全部で8個あり、それらが3次元の方向に積み上げられて($2 \times 2 \times 2 = 8$)キューブになっている(図3)。

木製のキューブは非常に精密に

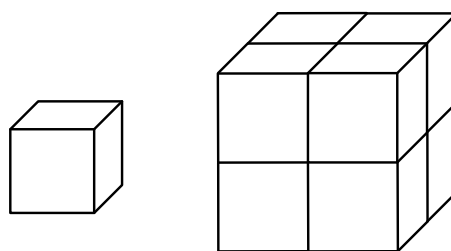


図 3. 8個の立方体

作られていて隙間がなく写真のつながりを感じさせない。また堅くて重い材質の木であるので、操作をするたびにカチ、カチと心地よい音がする。8個の立方体は上質の写真のフィルムのようなもので張り合わされている。ラミネート加工というのだろうか、簡単に破れそうにない。

さて、8個の立方体がどこでどうつながっているかが一番興味のあるところだ。買ったその日は操作を繰り返しながら仕組みの解析を楽しんだ。風景の写真1枚は正方形が4個でできている。先に示したように風景は全部で12枚の勘定になっている。最小単位の立方体は6面あり、これが8個あるから、面の数は全部で48面になる。1枚の風景が4面で構成されるから、48面を4面で割ると12枚になる。ということは立方体のすべての面をうまく利用してできているパズルであることになる。

なんども操作するうちに、8個の立方体は図4の太線の箇所につながっていることがわかった。つながりの場所は8箇所あり、その位置関係が面白い。このようにつなげば8個の立方体はバラバラになることなく、また48面のすべての面を見せることができる。誰が考え出したのだろう。立方体を裏返すことができるとは！実に素晴らしいアイデアである。

ここまで調べてみると、あとは自作してみたくなるものだ。商品と同じで木製のものを作ろうと思ったが、旅行先なので木やノコギリが手に入らない。そこで厚めの画用紙でできないかと考えた。文房具店で紙とセロテープ、のりを買ったが、値段が非常に高いのに驚く。日本では紙をふんだんに使えたが、そうではなく、文房具は貴重な商品である。

さらにコピー紙のB系列がまったくないのに困った。日本ではA4, A3, B4, B5などすべての用紙がそろえられているが、ケンブリッジは小さな町でB4などがなくA系列だけである。

とにかく、厚めの画用紙で8個の立方体を作り、実物と対比させながらセロテープでつないでみた。時間がかかったが

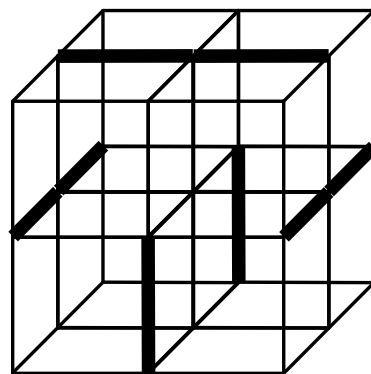


図4. 立方体のつながり

それらしきものができた．やはり紙製にしてよかった．工作が楽であるし，紙で作ると多少の寸法違いが許されるという利点がある．紙はやわらかく 8 個の立方体を全体として調和させてくれる（図 5）．

図 4 につながりを示したが，最小単位の正方形の 24 個の面は 1 つにつながっているのである．この面を表の面としよう．そして隠れている 24 個の面（裏の面）も 1 つにつながっている．表の 24 面と裏の 24 面もつながっていて，全体の 48 個の面がつながっていることになる．操作をすると完全に裏返すことができるのであり，このキューブ・パズルは立方体の裏返しパズルであることに気付く．

このキューブ・パズルが裏返しとして可能なのは $2 \times 2 \times 2 = 8$ の立方体の場合だけであろう． $3 \times 3 \times 3 = 27$ になれば操作が不可能で面の数も勘定があわなくなる．このあたりは数学的には面白いところである．興味のある読者は自作してください．

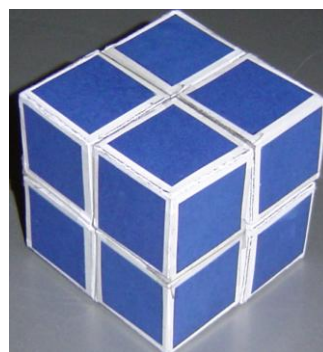
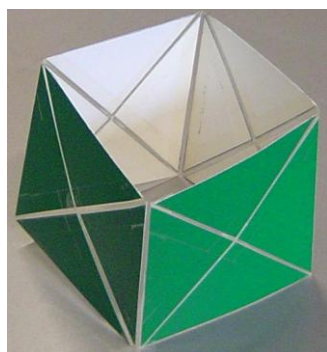


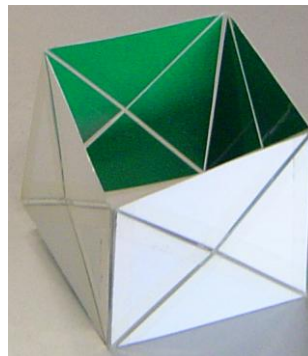
図 5. キューブの裏返し（自作）

2. 帯の裏返し

裏返すといえば，以前に別の意味での裏返しパズルを調べたことがあるので，それを紹介しておきたい．このパズルも立方体であるが，図 1 のような中の詰まった完全な立方体ではなく，紙を立方体状につないだ帯のパズルである．図 6 (1) のようなものを作成し操作を繰り返すと図 6 (2) のように裏返すことができるのである．この操作の過程はまるで知恵の輪を見るようである．



(1)



(2)

図 6. 帯の裏返し

パズルの醍醐味は解答を見るのではなく、自分で解くことであるので、ここでは解答を差し控えよう。読者にはこのパズルを自作することを勧めたい。裏返しの方法は現在のところ 2 通りの解答が見つかった。この解答を私があえて知らせないと言うことは、もしかして第 3 番目の解答が見つかるかもしれないという期待をこめるからである。

さて作り方であるが、画用紙で作って色を塗るという方法もあるが、これはあまりすすめたくない。それはマジックペンなどで塗るとむらが出て仕上がりがよくないからである。それより、画材店などでアート紙が売られているのでそれを買って使ったほうがよい。青色、赤色、緑色それぞれ自分の好みの色を選ぶとよい。色のついている側は傷をつけないようにして、裏側の白色の面に定規をあてて作図する。図 7 のような感じで 1 辺が 7 センチの正方形を 4 個よこにつなげる。そして対角線を引き直角二等辺三角形を 16 個にする。

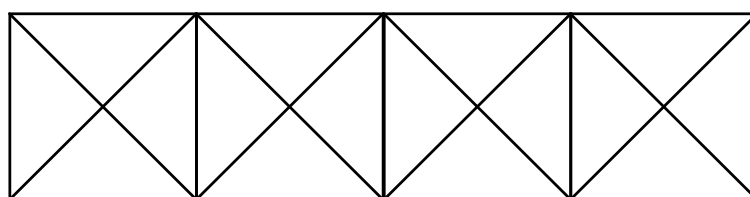


図 7. 帯パズルの作成図

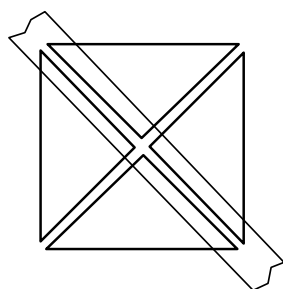


図 8. 隙間をあけてセロテープでつなぐ。

せっかちな人はこれでパズルが完成したと思うが、そうではない。ここからが肝心である。16 個の三角形をハサミできれいに切り離す。そしてこのパズルがうまく作動するように三角形と三角形の間は図 8 のように隙間をあけてセロテープでつなぐ。正方形の 1 辺が 7 センチであるから隙間は 2 ミリくらいがいい

いだろう。この間隔が大きすぎると見栄えがよくないし小さすぎると作動しなくなる。

セロテープはまず白地の方から張り、うまくいけば色つきの方を張るとよい。色つきの方は失敗がきかないからだ。セロテープは両面に張ること。セロテープは正方形をはみ出すように張ること。そして全部張り終わったあとに、はみ出した部分をハサミで切り落とせばよい。というのは、セロテープの張りなおし、重ねはあまりすすめられないからだ。

このようにしてセロテープでつながった4個の正方形ができる。これを横につないで帯状にすればパズルは完成したことになる。

パズルは自分で解くことに楽しみがある。あれこれしているうちに解けることもあり、戻せなかったりすることもある。解法には必ずルートがあり、強引に裏返してはならない。不思議なことにそのルートを知れば裏返すことができるのだ。このパズルの面白さは立方体状の帯であることだ。帯状の面の数が増えて、たとえば5面、6面のように大きな輪になったとしたら簡単に裏返すことができ、パズルでなくなる。帯の面の数が4面で立方体であることが鍵になっているところは、図1で示したキューブ・パズルが立方体であることと不思議と似ている。

どうしても解答を知りたい読者のために参考文献を示しておくと、まず M. ガードナーによるオーソドックスな方法がある⁽¹⁾。手順は約12手とちょっと長いですが、こちらの方法はよく知られている裏返しの手順である。もうひとつは私が知人から教えてもらったものを『数学セミナー』に載せたものである⁽²⁾。こちらは手順が約7手とずいぶん短い。あれっ！こんな操作ができるのかと思われるぐらい、鮮やかに裏返しができる。私は解答を聞くまで裏返しができなかった。

裏返しがなかなかできなくて、ヒントを求める人がいる。そういうとき私はいつもつぎのように言っている。パズルには表と裏がある。ということはかならず中間地点があるはずだ。表が半分、裏が半分見えているのが中間地点だ。その中間地点を見つければ裏にも表にも行ける。これは山登りと同じで、頂上が中間地点であるので戻ることもできるし、向こう側へ降りることもできるの

だ．だから中間地点さえ見つければ解けたと同じである，と．

3. ヘキサ・フレクサゴン

裏返しの話題を2つしたが，つぎに紹介するヘキサ・フレクサゴンもある意味での裏返しパズルである．ヘキサ・フレクサゴンのヘキサとは6の意味で，フレクサゴンとはフレキシブルなもの，つまり折りたたみ可能なものの意味である．

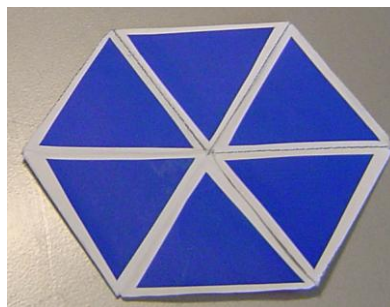


図9. ヘキサ・フレクサゴン

図9は自作したヘキサ・フレクサゴンで

ある．6角形をしていて，図10(1)のよ

うに三角形を2つずつ三菱のようにつまむと中心から新しい面が顔を出してくる．完全に開くと図10(2)のような別の面となる．表れる面の数は3個で，正確には裏返しではないが違った面が出てくるという意味では同じパズル群に属するであろう．

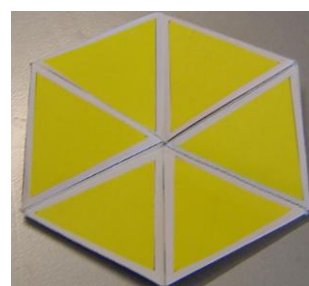
面の数は3個であるが，たとえばこれに色づけをしておくと青色，黄色，赤色の面が繰り返しあらわれることになる．このパズルも不思議なパズルであり，まだ作ったことのない読者のために作り方を説明しておこう．

図11(1)のように1辺が6センチの正三角形を横方向に10個並べる．右端の

「のり」と書いた正三角形はパズルには関係せず，ただ，のりづけだけのためにある．この程度の図



(1)



(2)

図10. 三菱のようにつまむと別の面が出る．

ならコンパスと定規で作成できるので各自作成すること．用

紙は画用紙でなく普通のコピー紙のほうがよい．コピー紙は折り曲げ操作が簡単で破れにくい．

折り方は、まず図 11(2)のように a-b に沿って手前に折る．つぎに c-d に沿って谷折りをして「のり」の下をくぐらせる（図 11 (3)）．そして e-f に沿って手前に折り，のりづけすれば完成である．メビウスの帯は普通の帯を 180 度ひねってのりづけした帯であるが，ヘキサ・フレクサゴンは 180 度の 3 倍，つまり 540 度ひねってのりづけした帯である．180 度の奇数倍ひねってのりづけすると裏と表の区別がないつながった平面になる．このパズルはトポロジーを応用したものである．

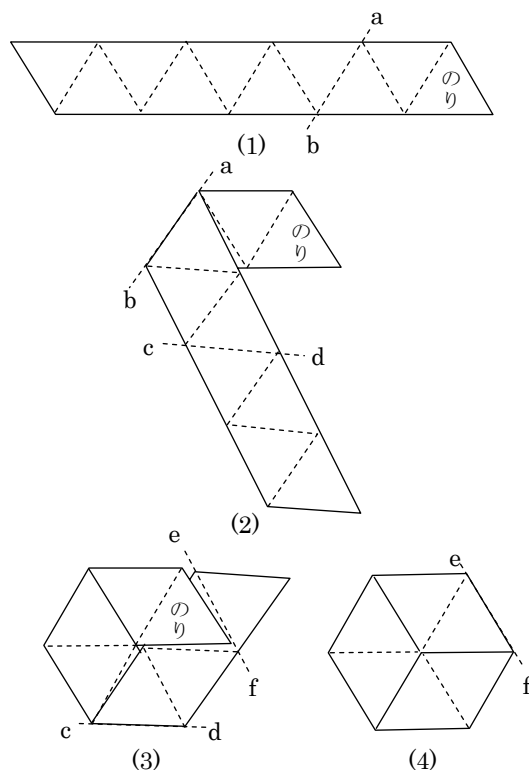


図 11. 3 面折りの型紙と折り方

パズルができれば，是非とも操作してください．図 10(1) のように正三角形を 2 つずつ摘んで三菱のような形をつくと，意外や真ん中から新しい面が出てくるのだ．この感激は作って操作をした者にしか味わえないものであろう．このパズルは正確には「裏返し」ではないが，別の面がでてくるという意味で同類であろう．

ヘキサ・フレクサゴンの別の楽しみ方は，3 つの面が出る 3 面折りを完成したとすれば，つぎは 4 つの面が出る 4 面折りに挑戦するとよい．4 面折りを実現するには型紙がどのようなものであっても，折り方はどうなるのかと自分で考えると楽しくなる．4 面折りができれば，5 面折りへと実行するうちに法則らしきものを見つけることになり，パズルから数学の領域に入っていく．

私は M. ガードナーの本に掲載されていた型紙を参考にして 4 面折り～8 面折りを完成させた．3 面折り，6 面折り，12 面折りなど面の数が 3×2^n の場合は型紙と折り方に法則性があることを知った．そして，趣味が高じて 24 面折り

まで作ってしまった．それ以外の面についての型紙と折り方についても方法がわかった．なかなか面白い体験をしたものである．本誌では「たたみかえの数理」として，その全容を紹介した．興味のある方はご覧ください⁽³⁾．でも，ここには解答が載せてあるので，自分で解きたい読者は見ないほうがいいかもしれない．

参考文献

- (1) M. ガードナー，金沢養訳『新しい数学ゲームパズル』白揚社，1968
- (2) 西山豊「つくってみよう， 解いてみよう」『数学セミナー』1994. 10
- (3) 西山豊「たたみかえの数理」『理系への数学』2004. 4