オルダム継手からエアコンまで

西山豊

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　情報社会学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

2015 年 7 月 18 日改訂

１．ある博物館で

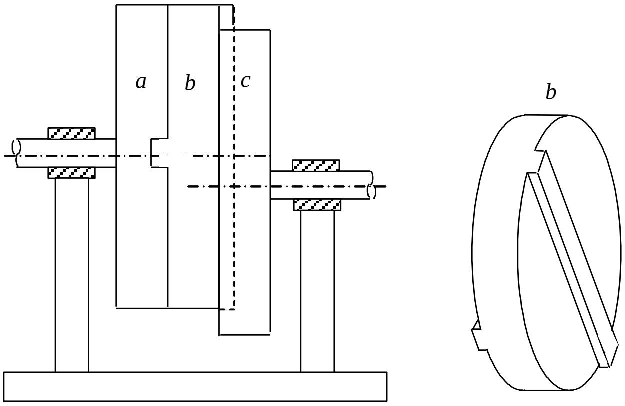
数学は教科書の中だけでなく生活の中に存在する．数学は抽象的な数式だけでなく，つねに具体的である．何か面白い教材がないかと京大総合博物館を見学しているとき，オルダム継手という機械の模型に目がとまり，私はそのように感じた．オルダム継手（Oldham's coupling）は，19 世紀から 20 世紀にかけて近代化のためドイツから輸入した機械のモデルで，オルダムは考案者の名前のようである．手で触ることができ，その奇妙で不思議な動きのとりこになってしまった．

ここに，わずかにずれた平行な 2 本の軸がある．左の軸の回転を右の軸に回転を正確に伝えるためにはどうすればいいのだろうか．素人考えでは，歯車を 3 個用いることがうかぶ．歯車の歯数が同じものを 2 個，それに回転の向きをかえるための 1 個の合計 3 個で可能だ．しかし，軸間の距離があまりにも小さいときは，そうとう小さい歯車が必要でこれは現実的ではない．自動車などに使われている自在継手というのがあり，これを用いれば可能といえば可能であるが機構が複雑になる．また，ベルトをかけるという方法も考えられるが，ベルトは伸び縮みするし，すり減ったりするので回転が正確には伝わらない．ここに紹介するオルダム継手は，きわめて数学的で，その数学も高等な数学ではなく中学生程度の幾何学の知識があれば理解することができるので是非とも読者に紹介しておきたい．

2．平行な軸に回転を伝える

オルダム継手の構造を森田鈞の文献をもとに模写したものが図１である[1].

３つの円盤a, b, cからなり，aまたはcに回転を与えると，bはaとcに対してすべりながら回転する．この機構のことを回り両スライダ機構といい，bのことを「二重すべり子」とよんでいる．aとcは円盤の直径に沿ってみぞが切ってあり，bは図 1(2)に示すように両面にそれぞれ直角をなす突起がでていて，これがaとcのみぞに入るようになっている．aがある角度回転すると，bもcも同じ角度回転するので，aとcの角速度は等しくなる．



(a)　　　　(b)

図１．回り両スライダ機構

オルダム継手の左端と右端の円盤a, cは等角速度の円運動をしているが，真ん中の円盤bの運動は円でも楕円でもなく奇妙な動き方をする．サイクロイドやトロコイドのように媒介変数を使った運動をする．以下，それを数式で確認してみよう．

３つの円盤を図２のようにモデル化してみた．円盤aの溝の先端の点をP，円盤cの溝の先端の点をQとする．PはO_1が中心で半径rの等速円運動をしている．QはO_1とdだけ離れたO_2が中心で半径rの等速円運動をしている．$P(x, y)$と$Q(x, y)$の座標はつぎのようになる．

$$P(r\cos(\frac{\pi}{2}-\theta), r\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) \qquad Q(r\cos(-\theta)+d, r\sin(-\theta))$$

２つの直交する溝の交点の座標を$R(x, y)$とすると，これが円盤bの中心O_3と

なり，計算により　$R(\frac{d}{2}(1-\cos 2\theta), \frac{d}{2}\sin 2\theta)$　となる．

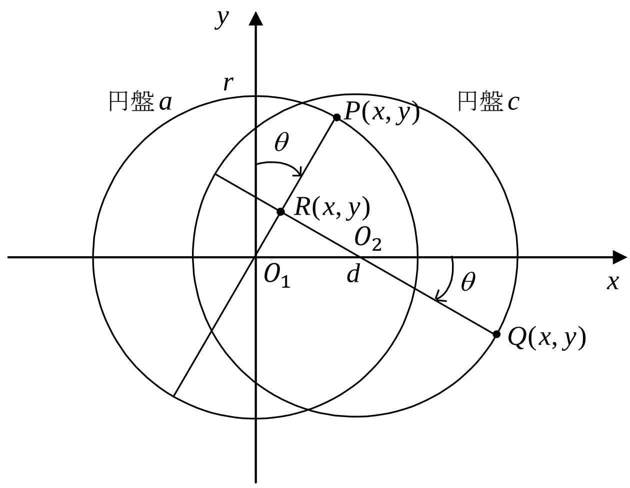
点 R は中心が $(\frac{d}{2}, 0)$，半径が $\frac{d}{2}$ の等速円運動となる．また，この点 R は角速度が円盤 a，円盤 c の角速度の２倍になっていることに注意すること．

したがって，円盤 b の円周上の点 $S(x,y)$ はつぎのようになる．

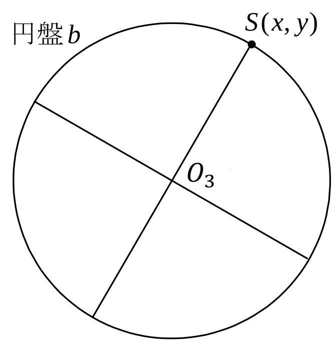
$$S(x,y) = R(x,y) + P(x,y)$$

角速度を ω，時間を t，角度を θ とすると，$\theta = \omega t$ であり，$P(x,y)$ は角速度 ω で動き，中心 $R(x,y)$ は角速度 2ω で動くので，$S(x,y)$ は角速度が一定でないことがわかる．t に関して x 方向の微分，y 方向の微分が計算できるが，サイクロイドと同じように単純な数式（$f(x,y)=0$ のような形）で表すことはできない．数式で明示できないが，Δt を小さくとって $S(x,y)$，導関数 $S'(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ を数値計算してみると，等角速度運動でないことがわかった．

なお溝の直交性の関係は必要条件ではない．角度を持たせておくことだけが必要で，そうすれば２つの軸間に回転運動を正確に伝えることができるが，ここではそれについては深く立ち入らない．



(1) 左右の円盤



(2) 真ん中の二重すべり子

図２．オルダム継手の座標系

θが0から$\dfrac{\pi}{2}$まで変化するとき，３つの円盤がどのように動くかを図３にまとめた．変化の様子を知るために円盤上の点を丸印で示した．円盤aと円盤bは溝の先端の点であるが，円盤cは溝から$\dfrac{\pi}{2}$だけずらして表示してある．左右の円盤aとcは中心が固定されているので単純な円運動をするが，真ん中の円盤bは中心がつねに移動するので複雑な動きとなる．軌道は円軌道でも楕円軌道でもない．また速度は等速ではなく，最初は円盤aの位置から始まり（$\theta = 0$），しだいに速度を増しながら進み，最後は円盤cの位置に重なる（$\theta = \dfrac{\pi}{2}$）．円盤bが移動した領域の包絡線は中心が$(\dfrac{d}{2}, 0)$，半径が$r + \dfrac{d}{2}$の円となる．したがって，円盤bはこの円をはみ出ることはない．

座標を数式化して，その方程式を微分すれば速度の変化を知ることができるが式が煩雑になるので

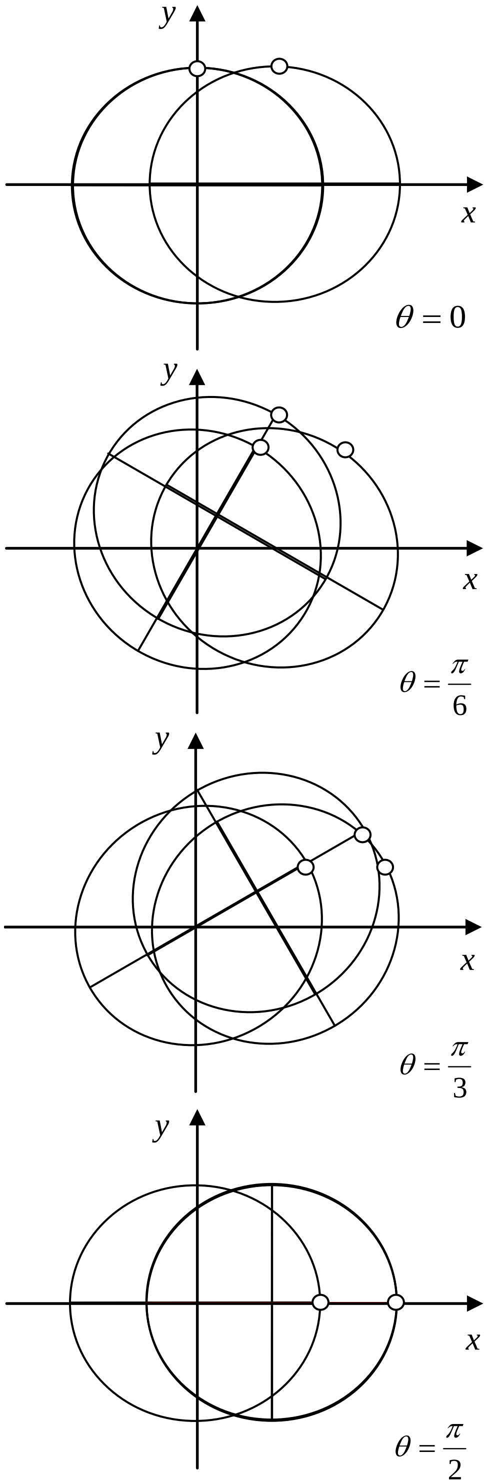


図３．推移図$(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2})$

ここでは割愛する．それにしても円盤bの複雑な動きには驚かされる．

オルダム継手の動きを数式では確認できたが，ほんとうにうまく動くのだろうか．私は模型が作ってみたくなった．最初は厚めの画用紙で作ってみたがうまく動かなかった．そこで木で作ってみることにした．ある DIY の店で工作用の部材が販売されていたので，それを組合せて作ったのが図４である．約 2000 円の材料費で作れた．みぞを切ったり突起を作ったりの凹凸の部分は精度が要求されるのでお店の人にカットしてもらった．博物館で見たオルダム継手は金属製だが，木製でもその機能を再現するには十分であった．

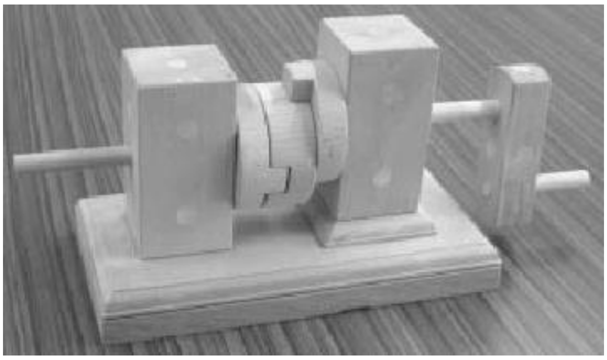


図４．自作したオルダム継手の模型

その後，別の会合でオルダム継手を紹介することがあった．大阪教育大学の菅原邦雄さんから，直径の異なるストローを用いれば紙でも模型を作れることを教えてもらった．数学のアイデアが産業機械に反映されているのを知って，数学を専攻していることをなんとなく嬉しく思った．図４の写真だけで動きがわかりにくい場合は，インターネットのホームページで検索すれば，オルダム継手の動画を MPEG 形式で見ることができる．私は２～３のサイトでそれを見つけた．高専または工学部機械学科の授業ではオルダム継手が教えられているようである．

３．エアコンのコンプレッサー

この記事を『数学セミナー』に紹介したところ(3)何人かの読者から手紙をいただいた．その中のひとりから「オルダム継手が面白いところに使われている」ということを教えていただいた．それはエアコンの中のコンプレッサーに使われているというのだ．エアコンの冷房の原理は，気体をまず圧縮し，それを膨張させることによって熱を奪うということであるが，エアコンにはどうしてもコンプレッサー（圧縮機）が必要である．そのコンプレッサーの技術は，最初

はピストン方式であったが，ルーローの三角形を応用したロータリー方式へと技術が進み，そして現在，さらに改良が進みスクロール方式というのがあるらしい．そのスクロール方式は，オルダム

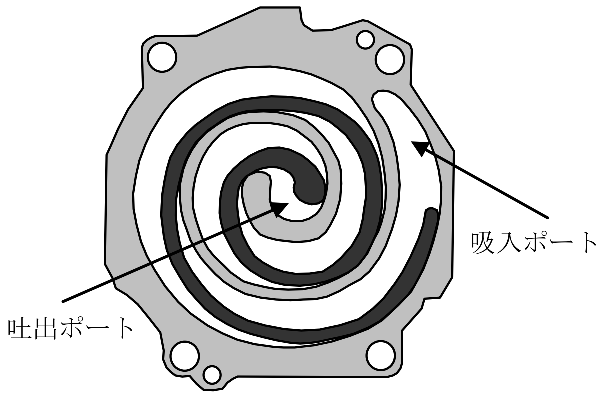


図５．コンプレッサー（スクロール方式）

継手そのものではないが，「二重すべり子」の原理が使われている．スクロール方式のエアコンは振動や騒音が少なく，カーエアコンにも使用されている．

数学のアイデアがエアコンの中に使われているのに，私たちはなぜ気づかなかったのか．それはコンプレッサーが精密なものであるから，しっかり鋳物で固められていて内部を見ることができないからだ．スクロール方式は固定スクロール（灰色）と可動スクロール（黒色）からなり，可動スクロールは固定スクロールのまわりを擦り寄りながら回転する（図５）．吸入ポートから入ってきた気体は可動スクロールが約３回転するあいだに中心部に圧縮されて吐出ポートから出される．

最近は企業ミュージアムというのが流行っていて，企業が自社の製品を紹介するために博物館を作り一般の見学を無料で許可しているところが多い．私はエアコンのメーカーであるダイキン（大阪）の展示室に行ってスクロール方式の模型を見せていただいた．これも動きが面白いのでデジカメの MPEG 方式で録画した．私は京大総合博物館で見たオルダム継手のリンク機構にびっくり，この機構がエアコンに使われていることを知ってびっくり，ということで二度びっくりしたことになる．

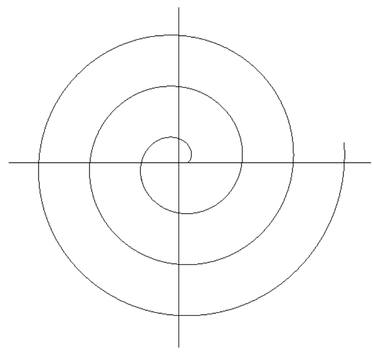


図６．インボリュート曲線

４．歯車のインボリュート曲線

固定スクロールと可動スクロールに

使われている曲線を図示すると図６になる．この曲線はインボリュート曲線というもので，よく知られているらせん曲線に近いが少し違う．インボリュート曲線の位相を 180 度ずらしたものをもうひとつ用意し，２つを重ね合わせてオルダム継手のように作動させると，図５に示したスクロール方式の仕組みがよくわかる．

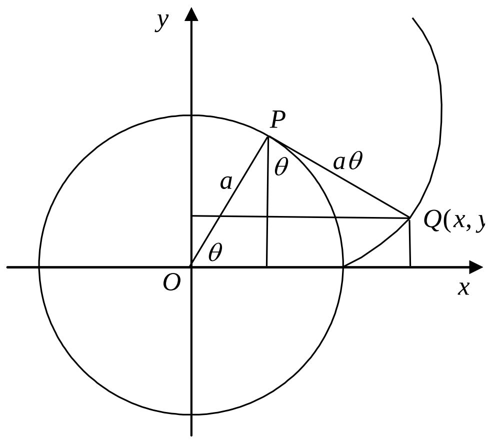


図７．歯車とインボリュート曲線

インボリュート曲線はもともと歯車の歯形の技術革新のなかで考案された曲線である．基礎円に巻きつけた糸をときほぐしていくとき，糸の上の点が描く曲線である．基礎円 O の円周上の点を P とするとき，点 P で接線を引き長さを $a\theta$ とした点 $Q(x, y)$ がインボリュート曲線の座標となり式で表現すると

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$$

$$y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

となる（図７）．

歯車は２つの回転体の運動を伝えるものであるが，歯形が特に重要である．歯形はサイクロイド歯形やピン歯形を経てインボリュート歯形が歯車に最も適していることとなった．その理由を図８に示そう．歯車 O_1 の歯形は AA'，歯車 O_2 の歯形は BB' であり，P 点で接しているとする．接点 P は２つの歯車の共通接線の線上を P_0 から P_3 まで動く．

O_1 の回転を進めると接点は P_2 となり O_2 に回転が伝えられ，そのときの歯形は $P_{12}P_2$ と $P_{22}P_2$ である．O_1 を逆方向に回転させると接点が P_1 となり，そのときの歯形は $P_{11}P_1$ と $P_{21}P_1$ である．２つの歯車は接点を通じて回転運動が伝えられる．その接点は共通接線上を動く．接点が直線上を動くようにするためには，歯形がインボリュート曲線であることだ．実に数学的ではないか．数学が教科書だけでなく生活の中に生きているのだ．

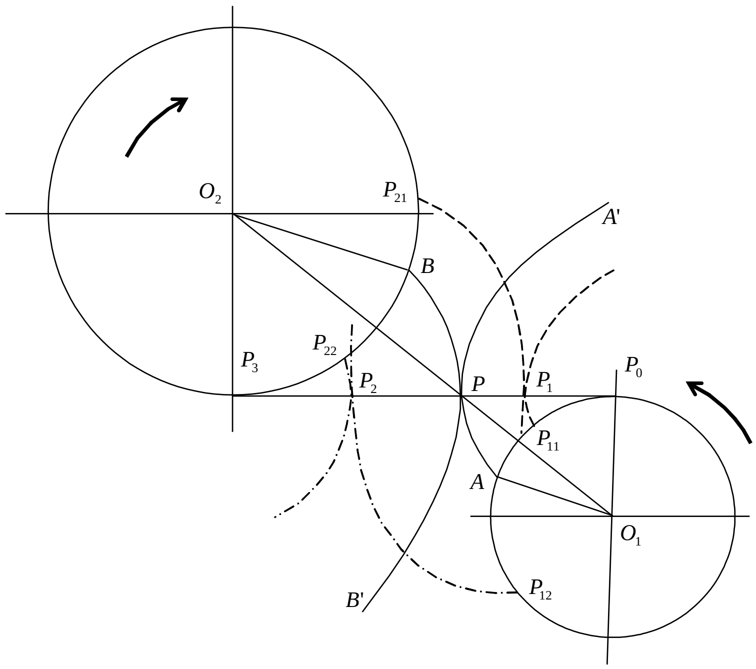


図８．インボリュート歯形のかみ合い

参考文献

(1) 森田鈞『機構学』実教出版，1974，158-159

(2) 齋藤二郎『機構学のアプローチ』大河出版，1976，146-147

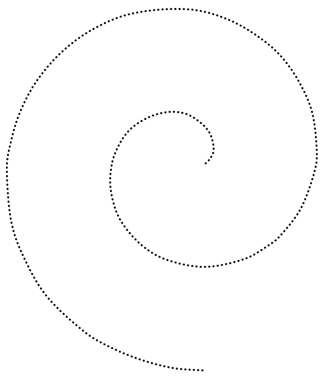
(3) 西山豊「博物館で見たオルダム継手」『数学セミナー』2004.2

補遺（2015 年 7 月 18 日）

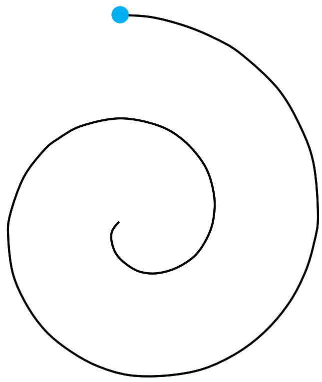
2 本のインボリュート曲線が空気を圧縮していく過程を補足説明します。図９の点線で示したのは固定スクロール、実線で示したのは可動スクロールです。可動スクロールは移動スクロールを 180 度位相ずらした（180 度回転させた）ものです。可動スクロールは姿勢を保ったまま（自転せずに）、水平方向と垂直方向のみ移動可能で、公転します。

可動スクロールが固定スクロールにすり合わせて空気が圧縮される過程を図 10 に示します。黒丸はインボリュート曲線どうしの接点です。右上の吸入ポー

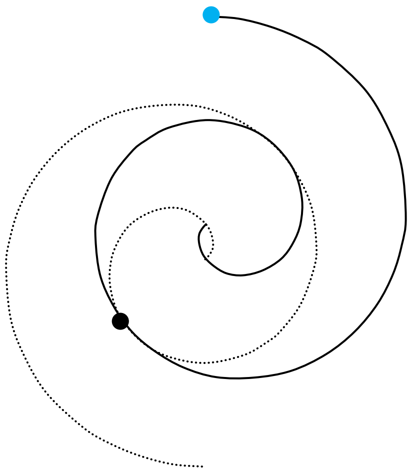
トから入る新鮮な空気は、可動スクロールが約 2 回転することで、空気が中央部に圧縮され、吐出ポートから出ていきます。このようなことが可能なのはインボリュート曲線（図 11）だからであり、らせん曲線（図 12）では中央部で曲線どうしが重なってしまいます。



(1) 固定スクロール



(2) 可動スクロール（180 度の位相ずれ）



(3)すり合わせ

（可動スクロールは、自転は不可、水平方向、垂直方向のみ移動可）

● 固定スクロールと可動スクロールの接点

● 可動スクロールの定点

図 9. 2 つのインボリュート曲線

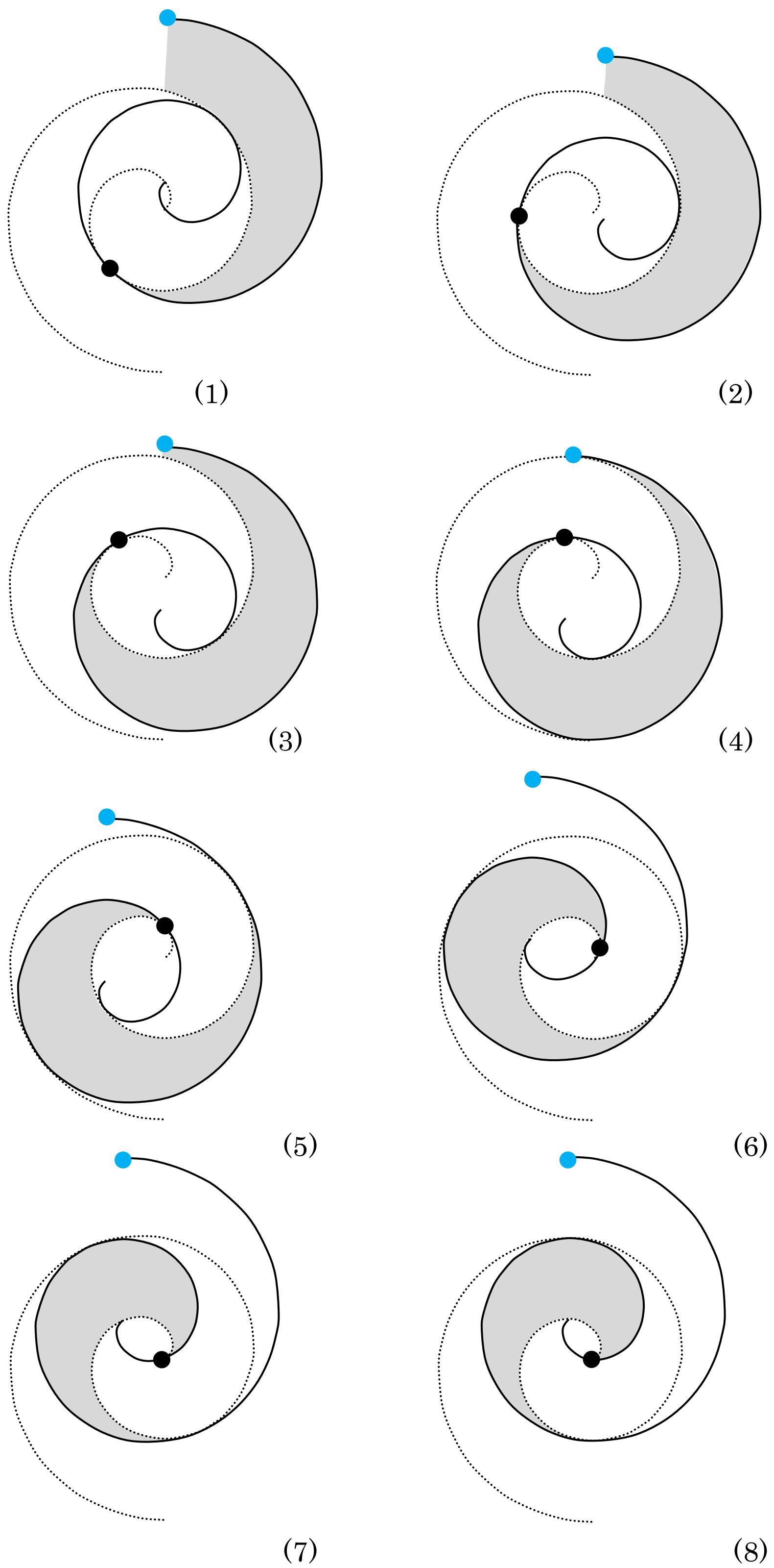


図 10．推移図

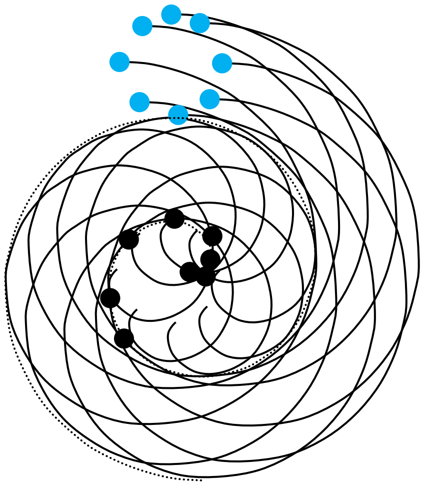


図 10a　可動スクロールの軌跡

図 10 の８つの推移図を重ねると、可動スクロールは自転をしない（姿勢を保った）円運動となる。

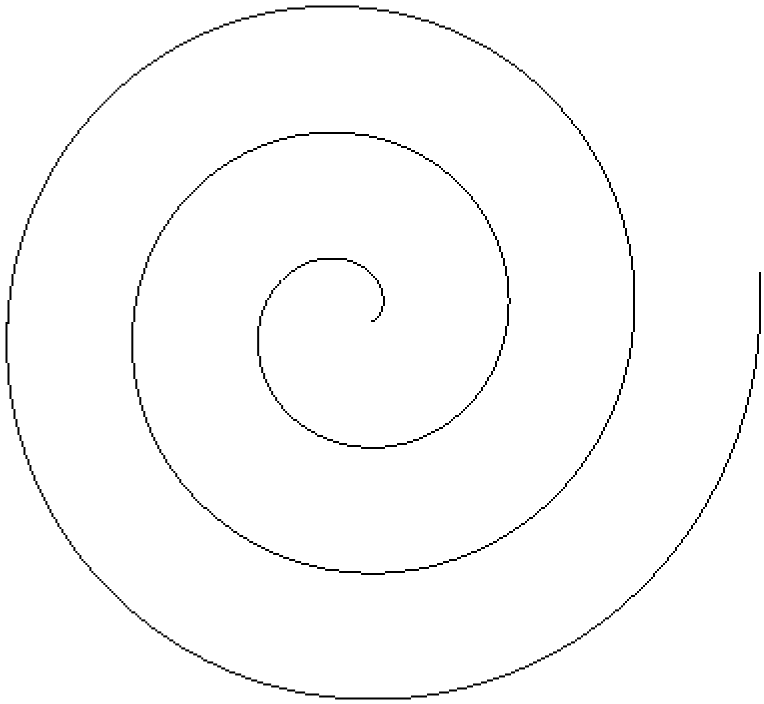


図 11. インボリュート曲線（OHP 用紙にコピーして実験してください）

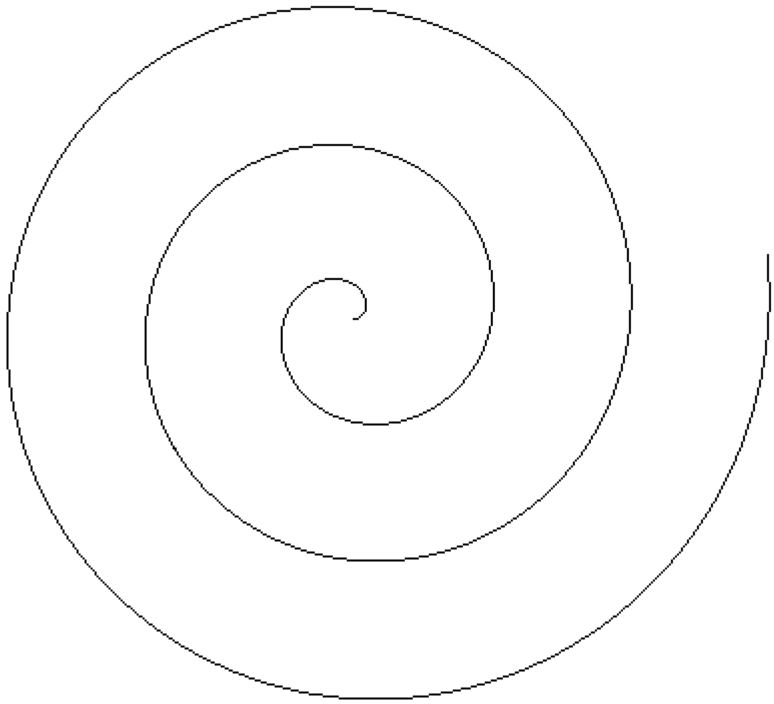


図 12. らせん曲線では不可能？！