# セパタクローで数学を

**西山豊**

〒533-8533　大阪市東淀川区大隅 2-2-8　大阪経済大学　情報社会学部

Tel: 06-6328-2431　E-Mail: nishiyama@osaka-ue.ac.jp

初出：西山豊「セパタクローと試験問題」『理系への数学』2004 年 9 月, 62-66

2013 年 10 月 24 日更新

## １．セパタクローボールを作ろう．

　受験勉強には緊張と緩和が大切である．大学入試の難問題に挑戦した後はパズルを楽しむとよい．ここに紹介する遊びは埼玉県の大沢重憲先生から教えていただいたものである．タイ国でポピュラーな球技にセパタクローがある.「セパ」はマレー語で「蹴る」,「タクロー」はタイ語で「ボール」という意味らしい．この競技に使うボールは籐（とう）製で直径が 12 センチで，とても丈夫で足で蹴って遊び，日本の蹴鞠（けまり）に似たスポーツである（図１）．アジア大会では正式種目になっていて，こちらはプラスチック製である．

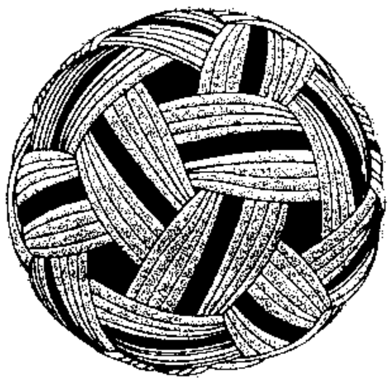


図１．セパタクロー

　このセパタクローボールは数学では準正 32 面体と関係している．また，ただ遊びとして楽しいだけでなく，ノーベル化学賞の受賞で有名になったフラーレン分子 $C_{60}$ やサッカーボールの構造にも関係している（図２，図３）．ここに紹介するのは，セパタクローボールと同じ形をしたものを荷造り用のテープを使って作ろうというのだ．準備するものは，荷造り用のテープ（ポリプロピレン製でＰＰバンドと呼ばれている）で幅が 15 ミリメートルのもので長さが３～４メートルあればよい．テープの長さを 56 センチメートルにして６本用意する．この長さと本数についてはあとで説明する．そして作業の途中にテープを止めるものとして洗濯バサミが６個あるとよい．

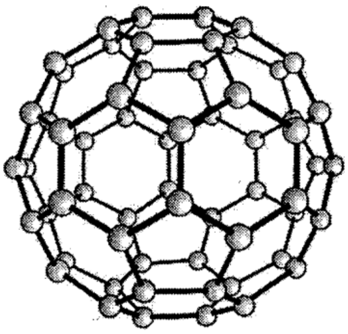


図２．フラーレン$C_{60}$

図３．サッカーボール

作り方のポイントとしては，つぎの４点が重要である．

(1) １本のテープは 25 センチを２周と６センチで回る．２周することによってボールの強度を高めるためである．

(2) ３本のテープは三竦み（さんすくみ）で交わる（図４）．上下の関係は逆のパターンもあるが，どちらかに統一しておくこと．

(3) １本のテープは交差するテープと上下，上下…と交わる．

(4) ５本のテープは正５角形の空洞を作る（図５では黒色の部分）．

テープ上で，点線で示した部分は正６角形を作っていることがわかる．以上の基本を念頭におきながら，図６を参考にして手順を説明していこう．まず，３本のテープで三竦み（さんすくみ）の関係をつくる(1)．この関係はすべての交わりについて成立つので基本として覚えておくこと．

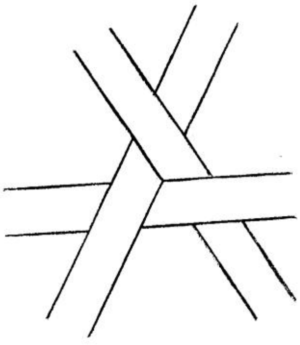


図４．三すくみ

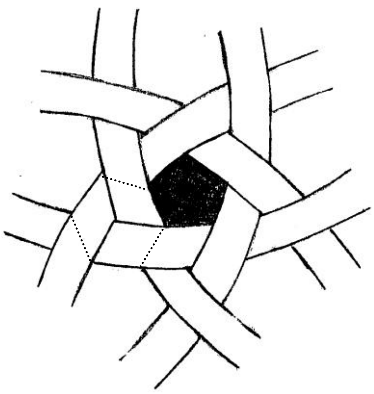


図５．正５角形を作る

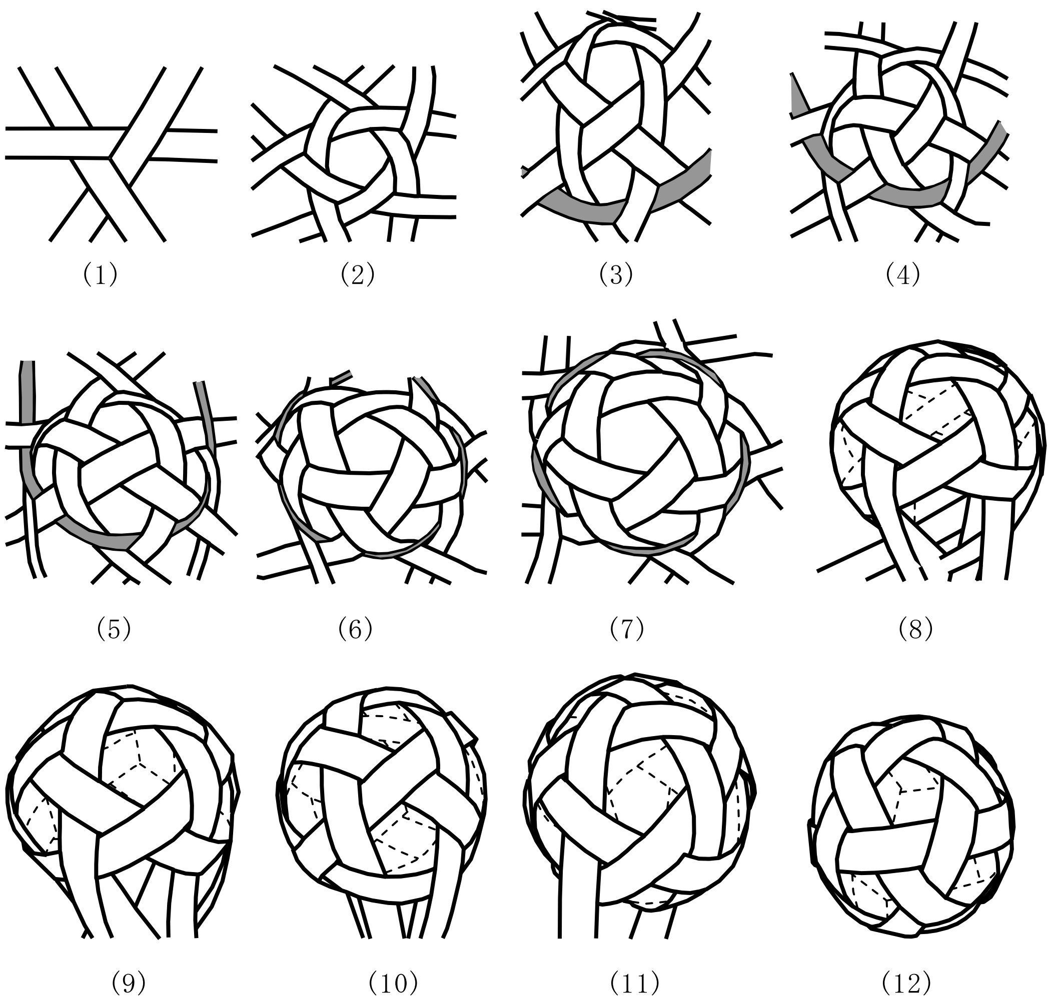


図６．セパタクローボールの作成図

つぎに５本のテープで正５角形の空洞を作る(2)．洗濯バサミでテープを止める場合は放射線状にすると作業がしやすくなる．洗濯バサミの数は５本である．そして６本目のテープを通すわけであるが，どこから通してもよく，三竦み（さんすくみ）と正５角形の空洞を作るということを忘れなければよい．６本目のテープは灰色で示した．２個目の正５角形ができ(3)，３個目の正５角形ができ(4)，４個目の正５角形ができ(5)，５個目の正５角形ができ(6)，６個目の正５角形ができる(7)．

このとき，６つの正５角形の配置は，最初に作った正５角形のまわりに５つの正５角形ができていることになる．また，６本目のテープ（灰色）は，正５角形が６個できるとき閉じたテープとなり，２周目をまわっていることになる．

この時点では全体の半分までできたことになり，テープを止めるための洗濯バサミも必要でなくなってくる(7)． 通しきっていない５本のテープを順番に上下，上下と通していくとセパタクローボールが完成したことになる(8)～(12)．

## ２．正多面体は何個できるか？

セパタクローボールは，紙と鉛筆で数学を解くのではなく，手指を動かして作業するので数学を実感できるし,空間図形を理解できるといった要素がある．また空間図形の問題として出題できそうな問題が沢山あるので，それを紹介しよう．

多面体には正多面体と準正多面体とがある．多面体を構成する要素が１つの正多角形であるとき正多面体，構成する要素が２つ以上の正多角形であるとき準正多面体という．そして，正多面体は５個存在することが知られている．正４面体，正 6 面体，正８面体，正 12 面体，正 20 面体がそれである（図７）．正多面体は５個あって，５個しか存在しないことが証明されているが，これらのことは暗記して覚えるものだろうか．そうではなく，少し考えれば簡単に自分でも証明できるので，それを示そう[(1)(2)]．

［**問題１**］ 正多面体は５個しかないことを証明せよ．

（証明）

正 $n$ 角形が正多面体の１つの頂点に $m$ 個あつまってできるものと考えて証明してみよう．正 $n$ 角形の１つの頂角は $180°-\dfrac{360°}{n}$ である．１つの頂点に正 $n$ 角形を $m$ 個あつめたとすると, 頂点にあつまる頂角の合計は $360°$ より小さくなければならないから,

$$(180°-\frac{360°}{n})m<360°$$

となる．これを整理して,

$(m-2)(n-2)<4$ （ただし $n, m\geq 3$）

となる．これを解いて，

　$n=3$のとき$m=3,4,5$（正４面体，正８面体，正 20 面体）

　$n=4$のとき$m=3$（正６面体）

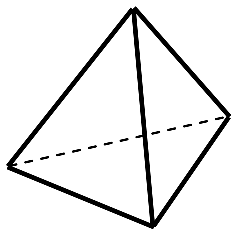
　$n=5$のとき$m=3$（正 12 面体）

の解が得られる．（証明終）　以上のことは各自，確かめよ．

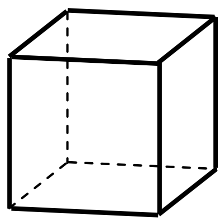
## ３．　オイラーの多面体定理

正４面体は正３角形が４個，正６面体は正４角形が６個，正８面体は正３角形が８個，正 12 面体は正５角形が 12 個，正 20 面体は正３角形が 20 個でできている．また準正 32 面体は正５角形が 12 個，正６角形が 20 個の合計 32 個でできている．

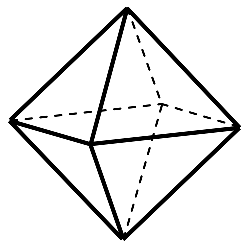
正多面体，準正多面体について，面（Face），辺（Edge），頂点（Vertex）の



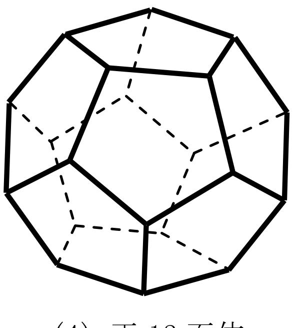
（1）正４面体



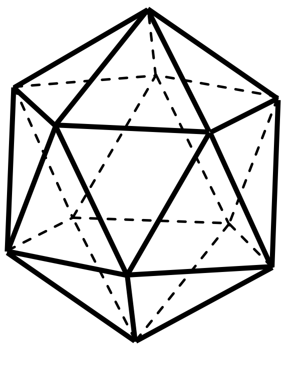
（2）正６面体



（3）正８面体



（4）正 12 面体



（5）正 20 面体

図７．５つの正多面体

数を書き上げると表１のようになる．

| | 面（F） | 辺（E） | 頂点（V） | F−E+V |
|---|---|---|---|---|
| 正４面体 | 4 | 6 | 4 | 2 |
| 正６面体 | 6 | 12 | 8 | 2 |
| 正８面体 | 8 | 12 | 6 | 2 |
| 正 12 面体 | 12 | 30 | 20 | 2 |
| 正 20 面体 | 20 | 30 | 12 | 2 |
| 準正 32 面体 | 32 | 90 | 60 | 2 |

表１． $F-E+V=2$

そしてこれらの数について

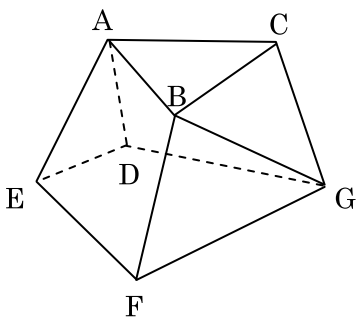
面（Face）－辺（Edge）＋頂点（Vertex）

を計算すると，

$F-E+V=2$

の関係が成り立つことがわかる．これはオイラーの多面体定理とよばれるもので，定理の証明については多くの本にあるので，ここでは手近にある矢野健太郎『幾何学の歴史』を参考に手順を述べる(3)．

［**問題２**］　図のような任意の多面体についてオイラーの多面体定理 $F-E+V=2$ について，証明の手順を説明せよ．




多面体の１つの面，たとえば $ABC$ を取り去ったものを考える．そうすると，頂点の数 $V$ と辺の数 $E$ は前とは変わらないが，面の数は $F'=F-1$ と１つ減っていることになる．もとの多面体に対して

$F-E+V=2$

を証明することが目的であるが，このように１つの面を取り去ったものに対しては

$$F'-E+V=1$$

を証明すればよいことになる．多角形は３角形に分割しておくと証明が易しくなる．そしてこの面 $ABC$ に隣接している面をひとつずつ取り除いていくが，その過程で $F'-E+V$ の量がどう変化するかを追えばよい．そして最後に１面（３角形）だけが残り，これは

$$F'-E+V=1-3+3=1$$

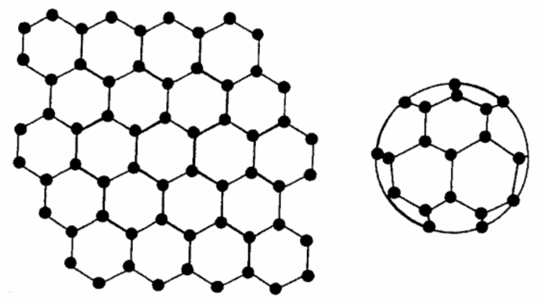
が成り立っていることがわかる．（証明終） 詳しくは前掲書を参考のこと．

## ４． フラーレン分子と準正 32 面体

このオイラーの多面体定理がフラーレン分子 $C_{60}$ の発見につながったということを知っているだろうか[4]．化学者たちは当初，炭素原子が 60 個の新しい分子について，その原子の配置モデルを正６角形だけで考えていた．ところが，この方法では球面を覆うことができないことがわかったのである．化学式でいうなら六員環だけでは球面は閉じなく，五員環の存在が理論的にも必要であるということだ．

そこで，このことを問題としてみた．

［**問題３**］ 60 個の原子から成るグラファイトのシートを曲げて閉じた多面体を作れないことを，オイラーの多面体定理 $F-E+V=2$ を用いて証明せよ．



60 個の原子に対して頂点の数は 60 である（$V=60$）．各頂点は他の３つの頂点を共有しているから，１つの頂点は３つの「半分の辺」と結びついている．なぜなら１つの辺は２つの頂点で共有されているから．したがって，辺の総数は 90 である

（$60 \times 3 \div 2 = 90,\quad E = 90$）．すべての面が６角形だとすると，１つの辺は２つの面（１つの辺の両側に１つずつ）のそれぞれの６分の１を構成しているから（$90 \times 2 = 180,\quad 180 \div 6 = 30$），面の総数は 30 である（$F = 30$）．

これらの値を左辺に代入すると，

$$F - E + V = 30 - 90 + 60 = 0$$

となり，右辺（$= 2$）に等しくない．したがって６角形ばかりの面であるグラファイトのシートからは$C_{60}$の多面体を作ることは不可能である．（証明終）

正多面体は５個しか存在しないことは先ほど述べたが，構成する正多角形の条件をゆるめて，二つ以上の正多角形を認めたものに準正多面体というのがある．この代表的なものが準正 32 面体で，これは球にもっとも近い準正多面体でサッカーボールとしても知られている．

フラーレン分子は$C_{60}$と表現しているが，これは 60 個の炭素原子が多面体の頂点に配置されているためで，数学でいう準正 32 面体と同じものである．準正 32 面体は面の数に注目した表現であって，頂点の数が 60 個，辺の数が 90 個あり，オイラーの公式はつぎのようになる．

図８．準正 32 面体

$$F - E + V = 32 - 90 + 60 = 2$$

## ５．　正５角形と正６角形の数

準正 32 面体は，正５角形が 12 個，正６角形が 20 個の合計 32 個でできていることがわかっているが，私は以前に，サッカーボールの写真を見ながら正５角形の数と正６角形の数を求めよという問題を出した(5)．これはなかなかいい問題で，入試問題としては最適ではないかと思っているので，それを再録しよう．

**［問題４］**　サッカーボールは正５角形と正６角形の個数が合計 32 個でできている．写真から得られる情報だけで，それぞれの個数を求めよ．

ユニークな解答がたくさんあったが，オーソドックスな解答を示しておこう．

正５角形の数を $x$ 個, 正６角形の数を $y$ 個とする．合計が 32 個だから，

$$x+y=32$$

となる．もうひとつの式をどのように導入するかが問題であるが，面に注目するか，辺に注目するか，頂点に注目するかで式ができる．

［面に注目］

１つの正５角形のまわりには５個の正６角形があるから，重複を許せば正６角形の数は全体で $5x$ 個になる．一方，正６角形のまわりには３個の正５角形があるから，$5x$ は３度重複されて数えられたことになる．そこで，$5x$ を重複度の３で割れば正６角形の個数となる．

$$y=\frac{5x}{3}$$

これを解いて $x=12,\quad y=20$ となる．

［辺に注目］

正５角形のまわりにある辺の数は５本だから全部で $5x$ 本ある. 正６角形のまわりにある辺の数は６本だから全部で $6y$ 本ある. 正６角形には正５角形がひとつおきにしか隣接していないので，このうちの半分が正５角形のまわりの辺の数に等しくなる．

$$5x=\frac{6y}{2}$$

これを解いて $x=12,\quad y=20$ となる．

［頂点に注目］

正５角形の頂点は５個だから全部で $5x$ 個ある. 正６角形の頂点は６個だから全部で $6y$ 個ある．ひとつの頂点に着目すると正５角形が１個，正６角形が２個隣接している．正６角形の頂点の数 $6y$ は正５角形の頂点の数 $5x$ の２倍になっ

ているから，

$5x:6y=1:2$

これを解いて $x=12,\quad y=20$ となる．（証明終）

以上，いずれの解法も複雑な式はでてこないが，この式を導入するには空間を読む力が特に大事であるように思える．機械的な計算が入試問題に占める割合が多くなっているが，数学的な考え方を試す問題も必要ではないだろうか．

## ６．テープの幅とボールの半径

セパタクローボールをＰＰバンドで何個も作っていると，もっと大きいものが作れないかと欲が出てくる．そこでテープの幅や長さとボールの半径との関係を調べてみた(6)．

**［問題５］**セパタクローを作るテープの幅が $d$ であるとき，そのテープがボールを１周したときの長さ $L$ を求めよ．ボールの半径が 2 倍のものを作るならどうすればよいか考えよ．

テープがボールを１周するのは，図９に示すようにＡからＢまで正６角形が

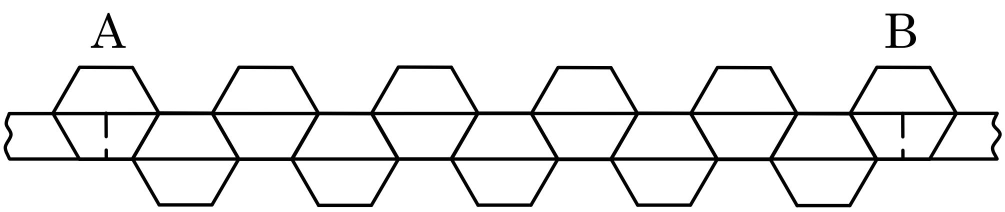



図９．

10 個分を通過したことになるから，周の長さ $L$ は $L=10\sqrt{3}d$ となり，係数の値は約 17.3 である.この関係式はテープの長さをどのくらいに見積もればよいかの参考になる．テープの幅が 15 ミリであるなら，周の長さは約 26 センチとなる．

また，見方を変えてテープは準正 32 面体でいう図 10 のようなコースを通過すると考えれば，周の長さ $L'$ は

$$L' = \{8 + \frac{4\sqrt{3}}{3}(1 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}})\}d$$

のようになる．係数の値は 17.4 になり先ほどの値より少し大きめである．

どちらにしても周の長さはテープの半径に比例することがいえる．周の長さとボールの半径は $L = 2\pi r$ の関係で比例するから，ボールの半径はテープの幅に比例することになる．

半径が 2 倍の大きさのセパタクローボールを作りたいなら，長さが 2 倍のテープを用意するのではなく，テープの幅が 2 倍のテープが必要だということだ．

高校での数学は教科書や参考書から離れないことが多い．もういちど原点に立ち返って，ものを作りながら数学を勉強するというのはどうだろうか．遠回

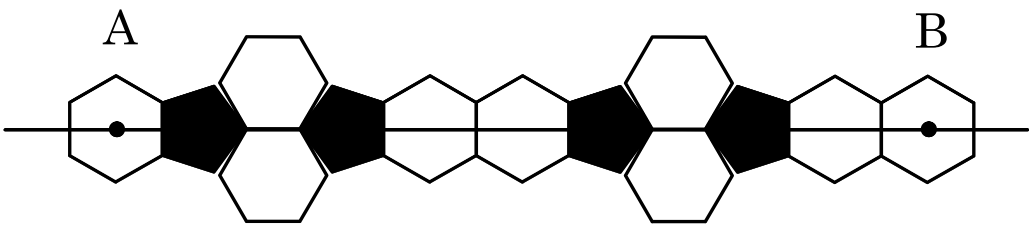



図 10.

りのような気もするが，意外とこれは近回りかもしれない．

**参考文献**

(1) 村上一三『美しい多面体』明治図書，1982

(2) 一松信『正多面体を解く』東海大学出版会，1983

(3) 矢野健太郎『幾何学の歴史』ＮＨＫブックス，1972

(4) ジム・バゴット，小林茂樹訳『究極のシンメトリー・フラーレン発見物語』白揚社，1996

(5) 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』1994.9

(6) 西山豊「セパタクローボールの半径」『数学教室』2001.12