アフィン変換による不動点

西山　豊

1．アフィン変換

ずっと以前になるが私は不動点の作図に関する記事を本誌に寄稿したことがある[1]．これは合同変換と相似変換についてのものだが，最近になって小島誠氏から「アフィン変換における不動点の作図」という論文のコピーを送っていただいた．その内容は氏のホームページで知ることができる[2]．いわゆる定理の拡張の話である．

いま任意の三角形ABCをアフィン変換したものをA′B′C′とする．アフィン変換の行列をAとするとき，$|\det A|<1$であるならば，この三角形A′B′C′を同じ係数（行列）でつぎつぎとアフィン変換していったとき不動点Fに収束することは，不動点定理より明らかである（図1）．

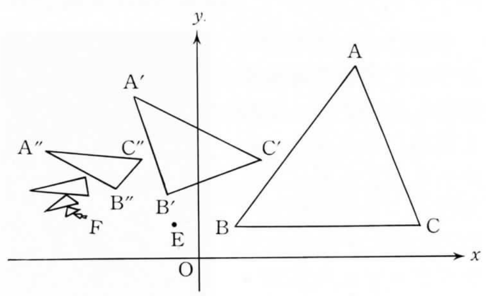

図1．アフィン変換

さて，この不動点Fを2つの三角形ABCとA′B′C′だけで作図が可能だろうか？　これは，可能である．合同変換，相似変換における不動点の作図にもちいた手法は，アフィン変換においても適用できるのである．後で証明の概略を示すが，アフィン変換への定理の拡張は明らかであり，当然といえばそれまでだが，それでも驚きである．

アフィン変換とは，任意の点（x, y）が（x', y'）に移るとき，

$$x'=ax+by+e$$
$$y'=cx+dy+f$$

で表される一次変換のことである．これは別の表現をすれば，ある点E(e, f)を中心にして，もとの座標値に行列

$$A=\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

を掛けたものである．

合同変換は長さと角度を変えることのない変換であり，相似変換は長さは変えるが角度は変えない変換である．アフィン変換は前式による一次変換であるから，長さも角度も変える変換である．ただし，直線をつねに直線にうつし，平行線をつねに平行線にうつすという性質がある．すべての三角形はアフィン変換で移されるので，アフィン幾何学では

〈すべての三角形は相等しい〉

という定理が成り立つ．

不動点の作図方法についてこれまでの定理発見の経過を述べておこう．合同変換の場合の最もエレガントな方法を西山が1982年2月に発表した[3]．この定理の特徴は図2に示すように作図にコンパスを使わないことである．

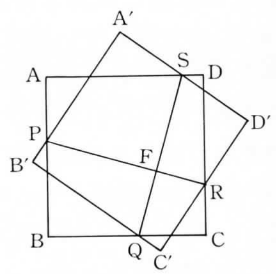

図2．合同変換

その後，森原則男氏が1989年4月に相似変換にもこの定理が拡張可能であることを示している[4]．図3がその作図例で，対応する辺が交点をもたなければ各々の辺を延長すればよい．

この作図法については同じころに日本国内で出版された文献に同様な解答がある[5]．出版年月が1990年7月であるがこれは翻訳本で，原著

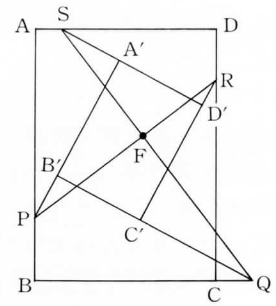

図3．相似変換

（U. S. A. Mathematical Olympiads : 1972-1986）の出版年は1987年である．日本とアメリカでの発表の時期はやや微妙であるが森原氏が独自に考案したものと思われる．

2．不動点の作図

私は，定理の拡張は相似変換までと思っていたが，今回の小島氏からアフィン変換への拡張が可能であることを知らされて，実際にそうなっているか早速パソコンで確認してみた．

まず任意の三角形ABCを設定し，任意の点E(e, f)を中心に任意の行列Aを掛けて三角形A′B′C′を求めた．そして同じ係数でつぎつぎとアフィン変換して三角形A″B″C″,…を作図した（図1）．するとこれらの三角形は不動点Fに収束するようになった．

現実問題としては，点E(e, f)と行列Aにどのような値を設定すればよいのか難しいので，最初に三角形ABCと縮小した三角形A′B′C′を与え，この2つの三角形の関係から点E(e, f)と行列Aを逆算して求め，それをその後のアフィン変換に適用した．三角形A′B′C′はもとの三角形より面積が小さくて対応する辺が平行でないようにしておけばよい．

さて，アフィン変換の不動点Fはどのようにして作図できるのであろうか？　それは，隣り合う2つの三角形からいずれの場合も不動点Fの作図が可能ということだ．ここでは三角形ABCと三角形A′B′C′から求める方法を示そう（図4）．

まず，三角形を180度回転させてそれをもとの三角形にひっつけて平行四辺形をつくる．平行四辺形ABCDとA′B′C′D′がそれらである．三角形の不動点を求めるのではなく平行四辺形の不動点を求めることにするのだ．辺ABと辺A′B′の交点をP，辺BCと辺B′C′の交点をQ，辺CDと辺C′D′の交点をR，辺DAと辺D′A′の交点をSとする．そして直線PRと直線QSの交点を求めれば，それが不動点Fになるのだ．

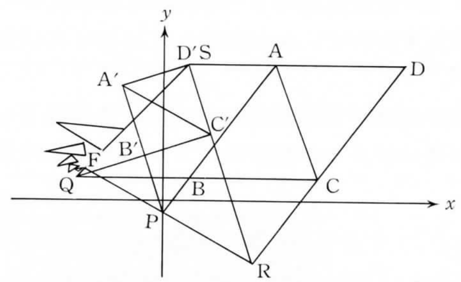

図4．不動点の作図（アフィン変換）

パソコンで作図した三角形の行き着く先（図1）と図4によって作図した不動点Fの位置が完全に一致したので，私は思わず感動してしまった．

3．証明の概略と視覚化

ここで森原氏が示した方法[4]で証明の概略を示しておこう．図3をイメージして説明するが，この証明は相似変換のみならず合同変換やアフィン変換にも適用できる．

長方形ABCDの上に長方形A′B′C′D′がのっているとする．下の長方形ABCDで，水平線をBCからADまで動かす．すると上の長方形A′B′C′D′では，水平線はB′C′からA′D′まで動くことに対応している．それぞれの水平線に対してお互いに対応する水平線があり，その2本の直線の交点の軌跡はQSとなる．一方，下の長方形ABCDの垂直線をABからDCまで動かせば，上の長方形A′B′C′D′の垂直線はA′B′からD′C′まで動くことになり，その2本の直線の交点の軌跡はPRとなる．不動点は水平方向も垂直方向もともに条件を満たさねばならないから，QSとPRの交点が求める不動点Fとなる．

さて，不動点をこのような手法で作図できることがわかったが，これを視覚化することが可能であろうか．つまり，アフィン変換の場合のランダム・ドット・パターンができるかどうかということである．合同変換，相似変換の場合のランダム・ドット・パターンは文献［1］を

参考にしていただくことにして，アフィン変換についての作成を説明しよう．

図１を想定して不動点Ｆをランダム・ドット・パターンで視覚化したいところだが，このような配置では点群が離れすぎて不可能である．アフィン変換前後の２つの図形は縮小比率にして97％くらいで，かつ隣接していなければならない．

図５に示すものがそれで，これでは図１とはほど遠いが２つの図形はアフィン変換されたもので（合同変換でも相似変換でもない）条件は満たしている．渦巻状の模様が見えるが，その中心が不動点であり，そこを指で押さえて上のOHPフィルムを回転させると図６のようになる．渦巻状の模様は消えて放射状の（相似変換の場合に比べて中心がやや楕円形の）模様になり，これがアフィン変換の場合の重ね合わせに対応している．

図５．渦巻の中心が不動点

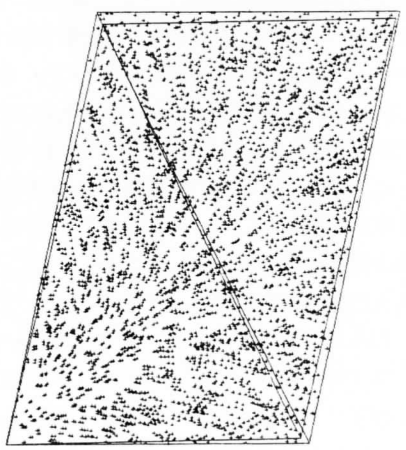

図６．

ランダム・ドット・パターンの作成は，合同変換の場合はコピー機を使って単純に等倍率のコピーを，相似変換の場合は97％程度の縮小率のコピーで可能であった．アフィン変換の場合はちょっとしたプログラムによる工夫が必要であるので，詳細を希望の方は連絡されたし．

不動点の作図に関する定理は，合同変換，相似変換，アフィン変換へと発展してきた．これら一連の定理は西山－森原－小島の定理としておきたい．数学の研究も皆で知恵を出し合えば発展するし楽しいものであると思った．

参考文献

［１］西山豊「不動点の作図」『BASIC 数学』現代数学社，1991年５月号

［２］小島誠「アフィン変換における不動点の作図」（私信）
http://www18.u-page.so-net.ne.jp/fa2/okabe-t-/kojima/

［３］西山豊「折紙をそろえる」『数学セミナー』日本評論社，1982年２月号

［４］森原則男氏については，岡部恒治「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』日本評論社，1989年４月号を参照のこと．

［５］M. S. クラムキン『数学オリンピック問題集《アメリカ編》』東京図書，1990年７月，p. 75

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

１次元格子振動への準備

中山 三也

日常見かけるブランコ遊びの解析によって，自然現象のモデル化の手順を示し，どのようにして実際の現象の解析に近づいていくかをみてきた．ブランコの第一近似は１本のバネに連結された質点の運動と同等であることを知った．

粒子をバネにつないでできる系は粒子の個数とバネの本数を変えることによって物理学や化学で取り扱う現象の重要な基礎モデルになる．簡単な例から出発して複雑な系を取り扱う準備としよう．

１個の粒子にバネを２本取りつけ，図１のようにバネの他端を固定点に固定した系を考えてみよう．この系は線型バネの合成則によって等価な１本のバネと粒子の運動に帰着される．２個の粒子を１本のバネに連結した系ではバネの伸縮に伴う粒子の運動は，等価な質量の粒子１個と等価な１本のバネの運動に置き換えることができる．前者は固定端，後者は自由端の問題であるが，何れか一方を調べておくとよいことが知られている［戸田盛和著：「振動論」pp. 132-135，倍風館（昭和43年）］．

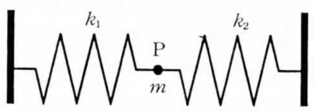

図１：粒子と２本のバネ

これから取り扱う問題ではバネの本数は粒子の個数より１本多く，バネと粒子の配列は直線状で連結バネの両端は固定端に固定されているものとして若干の例題を考察することにしよう．

例題１　１個の粒子と２本のバネ

質量 m の質点Ｐがフックの法則に従うバネ定数 k_1，k_2 の２本のバネに繋がれ，バネの他端は図１のように空間の２点に２本のバネが１直線になるように固定した系を考えよう．

質点Ｐのバネ方向の運動を表す運動方程式を求めよ．

解答

質点Ｐを平衡の位置で静かに手放すと，両側のバネが質点に及ぼす力は釣り合っているので，質点は静止の状態に留まる．質点の静止の位置を原点とし，バネに沿って x 軸をとる．質点を原点から x だけずらすと，質点は左側のバネから $-k_1x$ の力を原点に引き戻すように受け，右側のバネからは $-k_2x$ の力をやはり原点に押し戻すように受ける．したがって，ニュートンの運動方程式は，質点の運動量の時間変化率を質点に働いているこれら．本のバネの力の和に等しいと置くことによって得られる．

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}=-(k_1+k_2)x \qquad (1)$$

解答終

この運動方程式をみると，２本のバネに挟まれた質量 m の質点Ｐの運動はバネ定数 $k=k_1+k_2$ の１本のバネに取り付けられた質量 m の質点の運動と等価である（第２回例題　２参照）ことが分かる．１本のバネに連結された質点の運動は既に解析しているので次の例題に移ることにしよう．

例題２　粒子２個とバネ３本の鎖状連結

質量がともに m の２個の質点 P_1，P_2 が図２のようにフックの法則にしたがうバネ定数 k の２本のバネとやはりフックの法則にしたがうバネ定数 k' の１本のバネによって直線状に連結された系を考える．

両質点 P_1，P_2 のバネ方向の運動を記述する運動方程式を求めよ．

解答

質点を挟んで直線状に連結されたバネに沿っ