

たたみかえの数理

西山 豊

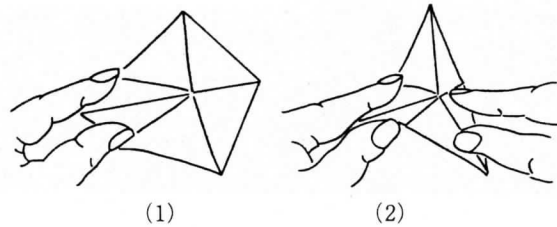
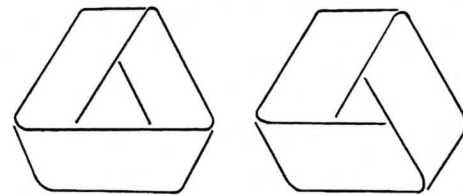


図1. 新しい面の出し方

図2はトポロジー（位相幾何学）でいう裏表のない平面についての説明図である。普通の帯を180度ひねってノリづけしたのがメビウスの帯とよばれるもので、ドイツの天文学者メビウス(A. F. Möbius, 1790-1869)が考案したものである。ひねりの向きは右ねじ、左ねじのどちらの向きでもよく、裏と表の区別がなくなりつながった平面となる。メビウスの帯は180度ひねっているが、ヘキサフレキサゴンは540度ひねってできている。540度とは180度の3倍である。一般に180度の奇数倍ひねってノリづけすると裏表のない平面になり、偶数倍ひねると裏表のある平面になる。



(1) メビウスの帯 (180度ひねり) (2) ヘキサフレキサゴン (540度ひねり)

図2. 裏表のない平面

2. 基本の3面折り

さて、ものごとは基本が大切である。ヘキサフレキサゴンの3面折りは基本中の基本であるので、読者はこの3面折りを完全にマスターして欲しい。

一辺が6センチの正三角形を図3(1)のように横に10個並べる。この程度の図ならコンパスと定規で描けるはずだ。10個の三角形の右端のものはノリづけのためにあるので、実際は9個の三角形がパズルに関係している。三角形は裏表の2面あるから、 $9 \times 2 = 18$ で合計18個の三角形があることになる。一方、フレキサゴンの六角形は三角形が6個できているから、 $18 \div 6 = 3$ で3面折りのものができることが数字の上からはなりたつ。

数字の上で勘定が成り立っても、三角形がどういう配置になっていけばよいか肝心であるが、その

説明は後述するとして正しい折り方だけを説明しておこう。a-bの線にそって谷折りし(図3(2))、c-dの線にそって谷折りし(図3(3))、<のり>の下をくぐらせてe-fの線にそって谷折りして、のりづけをする(図3(4))。谷折りを3回したことになるから $180 \text{度} \times 3 = 540 \text{度}$ ひねったことになる。

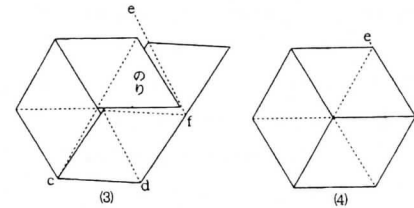
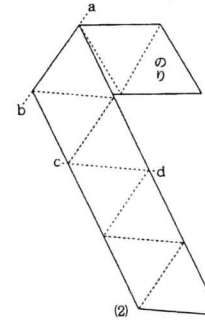
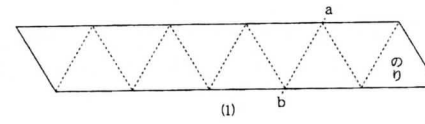


図3. 折りたたみの手順(3面折り)

のりづけしたヘキサフレキサゴンを図1のように隣接する2つの三角形をつまんでいくと、真ん中から新しい面が自然と現れてくる。もし出てこなかったら、無理に引っ張らずに三角形をひとつづらして(中心角で60度)みることだ。それでも出てこないようだったら、作り方が間違っているので図3にしたがってもういちど作り直してほしい。

ヘキサフレキサゴンが正しく動作するかを確認しておこう。そのためには六角形の面に数字を記入していく(図4)。最初の面を「1」とし、つぎに現れた面を「2」、そのつぎに現れた面を「3」とする。これらは1→2→3→1→2→3というように3つの面がサイクリックに現れるのが特徴である。

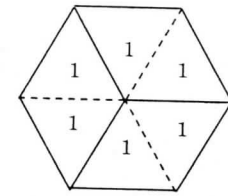


図4. 数字を記入

記入した1から3の数字が、実際どのような配置になっているかを知ることは興味のあるところだ。いったん作成したヘキサフレキサゴンのノリをはがして展開したものが図5である。数字の(1)、(2)、

(3)は紙片の裏側に記入された数字を示している。同じ数字は連続した領域にあるのではなく、2つずつのペアが裏表に等間隔に並んで配置しているのだ。また、図1の折りたたみとの関係でいえば、折りたたみの操作が一回につき図5では三角形が2個分ずれることになる。つまり、ヘキサフレキサゴンはひとつの細長い帯状の平面をずらしながら見ていることになる。

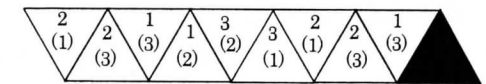


図5. 3つの面の関係

3. マーチン・ガードナーの型紙より

1990年に本誌で紹介した記事は以上の3面折りについてだけであった⁽¹⁾。私の興味と関心はもっと多くの面の折り方ができないかに移っていった。

マーチン・ガードナーの『現代の娯楽数学』にはヘキサフレキサゴンの紹介記事があり、この本の25ページに4面折りから7面折りまでの型紙がのせてある⁽³⁾。この本には型紙の図が掲載されているだけで折り方の説明はなかった。解答がのっていないから自力で解かねばならない。ああでもないこうでもない失敗を何度も繰り返しながら私はそれらを実現できた。

ヘキサフレキサゴンの多面折り($n \geq 4$)を実現するには面の数が多くなればなるほど、理論だけではなく実際に作成する用紙、作図法などの技術が問題になってくる。最初にパズルを知った1985年ごろは、画用紙にコンパスと定規で作図していた。3面折りだけならこれでよいが、面の数が増えると作図の精度が要求される。鉛筆の芯は0.3ミリ、定規の目盛は1ミリ単位であるので、いくら慎重に作図したとしても手書きによる誤差は最低0.1ミリはあ

0. はじめに

私は、本誌1990年12月号に「折り紙六角形」というタイトルでヘキサフレキサゴンという手作りパズルの紹介をした⁽¹⁾。あれから十数年になるが、このパズルについて理論的にもかなり進んで理解でき、また実際においても新しい折り方を実現できるようになった。そこで、このパズルを知らない読者のために紹介するとともに、このパズルが数学と密接につながっていることを説明したい。

1. 裏表のない平面

このパズルはイギリスの数学者アーサー・ストーン(Arthur H. Stone)が1939年に考案したもので、ヘキサフレキサゴン(hexaflexagon)という名前がついている。ヘキサフレキサゴンという名前がなじまないのか、「オリガミ六角形」または「たたみかえ折り紙」と邦訳されているが、これらは皆このパズルのことを言っているのである。

ヘキサフレキサゴンのヘキサ(hexa)とは6のことで、フレキサゴン(flexagon)とはフレキシブル(flexible)なもの、曲げやすいもの、いろいろな形になるものの意味である。フレキサゴンには六角形以外のものもあり、たとえばテトラフレキサゴン(tetraflexagon)は四角形のものだが、理論的にも実践的にも面白いのはヘキサフレキサゴンのほうである。

私がこのパズルの面白さを知ったのは1985年で、『数理科学』に掲載された池野信一の記事である⁽²⁾。日本になかったパズルかというところでもなく、古くからある玩具「びょうぶがえ」に類似している。

このパズルは紙製のもので六角形のかたちをしている。その六角形は6つの三角形で構成されていて、図1のように親指と人差し指で隣接する2つの三角形をつまむと、真ん中から新しい面が現れてくるのだ。

るだろう。1つの三角形の誤差が0.1ミリであったとしても、三角形が10個になると誤差が蓄積されて1ミリになってしまう。もし12面折りを作成するなら三角形の数が37個になるので、誤差は3.7ミリとなり無視できなくなる。また、当初、画用紙を使っていたが、画用紙は強いようで意外と駄目である。何度も折り曲げているうちに破れてしまうのだ。

このような経験から作図はコンパスと定規をあきらめ、パソコンを使って Visual Basic 言語で作成するようにした。パソコンの場合は手書きの誤差0.1ミリと誤差の蓄積3.7ミリはでてこず、かなり正確である。また画用紙は折り曲げに弱いので、普通のコピー用紙で作ることにした。コピー用紙は薄いのが意外と強い。材質の繊維が違うのだろう。また、面を区別するために最初は数字を記入していたが、次第に色分けしたほうがアピールすることに気づき色鉛筆で色を塗るようになるが、コピー用紙が薄くて裏まで色がうつってしまうので、色紙(色つきの折紙)をノリで張ることにした。

4. 基本系列への退化

さて、私が4面折りから8面折りまでをどのようにして実現できたかを説明しよう。型紙について代表的なものを選び図6のように整理した。黒色の三角形はのりしろに対応するもので、実際の面の現われには関係しない。

6面折りは比較的やさしいので、これから始めることにする。3面折りの型紙(図3(1))を単純に2枚横につないでノリづけしたのが6面折りの型紙だ。三角形の数は18個であり、それにのりしろの1枚(黒色)がついた合計19枚である。右ねじの法則で右端から規則的に折っていけば3面折りの型紙と同じになる。この状態から3面折りを適用すれば6面折りが完成する。

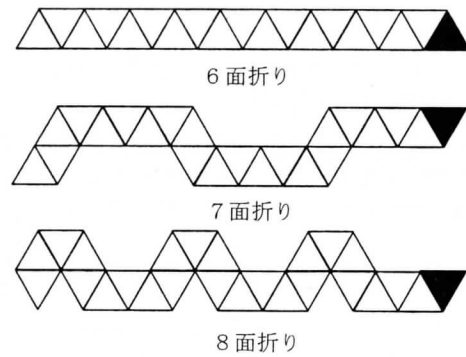
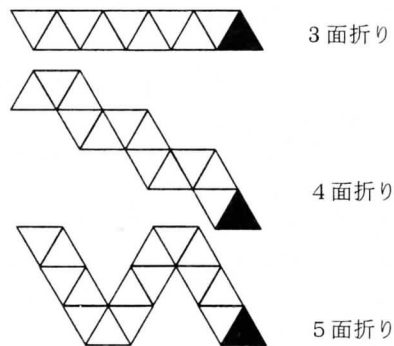


図6. 3面折りから8面折りまで(型紙)

3面折り、6面折りの型紙のように細長い真っすぐな紙片のことをジョセフ・マダチーはストレート・モデル(straight models)とよんでいる(4)。このストレート・モデルは次式で成り立つ。

$$n = 3 \times 2^p, \quad (p \geq 0, 1, 2, \dots)$$

p に値を代入すると $n=3, 6, 12, 24, \dots$ となり。3面折り、6面折り、12面折り、24面折りがこの方法で可能だということだ。そして $n=\infty$ 、つまり面の数が無限のものも理論的には可能だということになる。

これ以外のものは、このストレート・モデルの基本系列に退化するというのが基本である(図7)。その折り方については4面折りと7面折りについて次に示しておこう。

4面折りは、3箇所の点線のうち下から順番に右ねじの法則で3回折っていくと3面折りの型紙となる。重なり部分を灰色で示し、その部分は新しい面を構成するので「4」と記入した。(重なり状態)に3面折りを適用すれば4面折りが完成する。

7面折りは、3箇所の点線のうち右端から順番に右ねじの法則で3回折っていくと6面折りの型紙となる。重なり部分に数字の「7」を記入した。この6面折りの型紙から3面折りの型紙までもっていき、それに3面折りを適用すればよい。つまり、7面折り→6面折り→3面折りという手順になる。

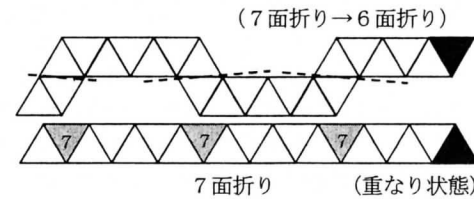
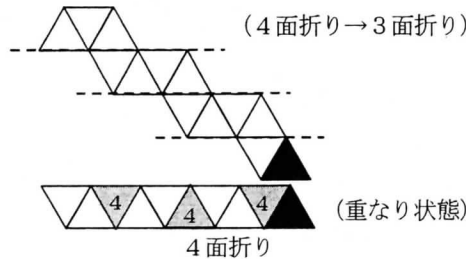


図7. 基本系列への退化

5. 推移図

以上のように折りたためば、目的の面の数だけ出てくるのは確かだ。ところで面が出てくる順番はどのようになっているのだろうか。それには図8に示す推移図を参考にするとよい。この図はジョセフ・マダチーの文献を参考にして私が作成したものである(4)。

3面折り($n=3$)の場合、推移図が三角形で表現される。三角形の頂点に記入した数字の1, 2, 3は面の番号である。三角形の内部にプラス(+)記号を記入したが、これは面の番号が1→2→3というように反時計回りに循環するということである。

4面折り($n=4$)の場合、3面折り($n=3$)の推移図に頂点1から頂点2に至る辺に新しい三角形が追加される。それは新しい面の数字4が関係する三角形である。この三角形の内部にマイナス(-)記号を記入したが、これは面の番号が1→2→4というように時計回りに循環するということである。4面折りの場合は1→2→3のプラス(+)循環と、1→2→4のマイナス(-)循環の2つが存在するということだ。たとえば、3から4に行くには3→1→4のように直接行けないので、1→2→3のプラス(+)循環で3→1→2と進み、1→2→4のマイナス(-)循環で2→4と進み4に到達する。この場合、2は中継点となっている。

6面折り($n=6$)の場合、3面折り($n=3$)の推移図に3つの三角形が追加される。1→2→3のプラス(+)循環のまわりに、1→2→4、2→3→5、1→6→3の3つのマイナス(-)循環が存在する。

7面折り($n=7$)の場合、6面折り($n=6$)の推移図の外側に1→7→4のプラス(+)循環の三角形が追加される。

このように n 面折りには n 多角形の推移図が対応し、 n 多角形は $n-2$ 個の三角形に分割され、隣り合わせる三角形の符号(循環の向き)は互いに異なるのである。推移図を作成しておく、任意の面を出す作業がスムーズになる。

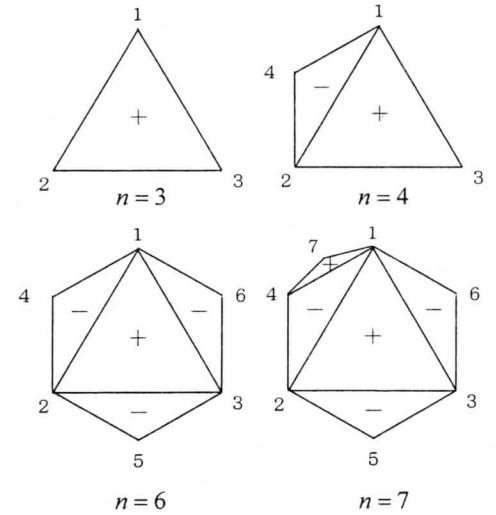


図8. 推移図

6. 多面折りの一般解

図6では3面折りから8面折りまでの型紙を、図7では折り方の概略を説明したが、9面以上の折り方についてはどうすればよいのだろうか。ここでは9面以上の型紙をどのように作ればよいのかを説明していこう。

まず、ストレート・モデルの基本系列が存在することは前述したとおりである。

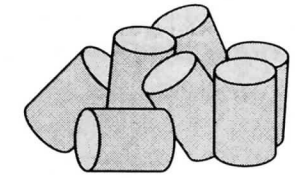
$n=3 \times 2^p$, ($p \geq 0, 1, 2, \dots$)で表されるもので、 $n=3, 6, 12, 24, \dots$ である。12面折り、24面折りは横に細長い紙片の型紙となる。では、これ以外の n についてはどうなるのか。それは基本系列への退化で説明したように、7~11面折りの場合は6面折りをベースに、13~23面折りの場合は12面折りがベースになる。

このベースになるストレート・モデルの上に(重なり状態)となる灰色の部分を描き、それをもとに逆展開していくと求める n 面折りの型紙ができることになる。詳しくは参考文献(6)を参照のこと。

私はこのようにして、 $9 \leq n \leq 24$ のすべての n について型紙が作図でき、それを折って動作確認したところ理論どおりであった。簡単なものから済ませていったが19面折りは最後まで未解決だった。

$n=19$ というのが素数であるので不可能ではないかと悩んだが、試行錯誤するうちに灰色の位置がきまり、その展開図をつくると蛇のような形となった(図9)。

以上は、 $3 \leq n \leq 24$ について可能であることを示



しただけであって、任意の n について数学的な証明をしたわけでもない。 $n \geq 25$ についてもこつこつと検討していけば恐らく問題ないであろうが、実際にものを作って確認作業をすることは大変であり、これが限界であると思う。

型紙をコンパスと定規で描くという方法は時間もかかるし誤差もでてくる。そこで、すべての型紙に適用可能な万能型紙を作成した (図 10)。これは Visual Basic で約 30 行の命令で作成できる。この万能型紙から n 面折りに必要な型紙をはさみで切り取ればよいのである。

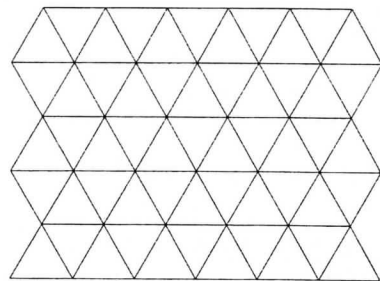


図 10. Visual Basic による万能型紙

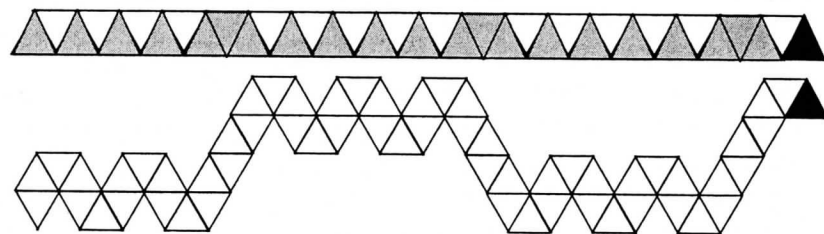


図 9. 19 面折りの型紙

(にしやまゆたか/大阪経済大学)

ヘキサフレクサゴンは、まず 3 面折りの現象をみて感動する。そして 4 面折りができるだろうか考える。4 面折りができると 5 面折りや 6 面折り。そして任意の n 面折りは可能だろうか考える。これらの思考の過程は「拡張」、「一般解」、「連続性」、「同値、同型」といった数学で行う手法に似ている。基本の 3 面折りでも感動は十分に伝わるので、このパズルを経験していない読者は是非とも試していただきたい。

〈参考文献〉

- (1) 西山豊「折り紙六角形」『BASIC 数学』1990. 12
- (2) 池野信一「たたみかえ折り紙」『別冊：数理科学。「パズル」IV』サイエンス社. 1979, p78-p82
- (3) M.ガードナー著. 金沢養訳「オリガミ六角形」『現代の娯楽数学』白揚社. 1960. p13-p28
- (4) Joseph S. Madachy, Madachy's Mathematical Recreations, Dover, 1979
- (5) 西山豊「オリガミ六角形の多面折り」『大阪経大論集』Vol.50, No.1, p353-p378, 1999. 7
- (6) 西山豊「ヘキサフレクサゴン (Hexaflexagon) の一般解」『大阪経大論集』Vol.54, No.4, 2003, 11

カルボン酸・エステル・油脂・石鹸

今回は盛り沢山ですが、重要な point だけかいつまんで学んで下さい。この theme は生体に応用が多いので、生命科学系の学部などでよく出題されます。また、最近は学部に関係なく生命科学系の単位を修得することが義務付けられていることが多くなっているため、工学部などでも出題頻度が up しています。

カルボン酸

分子内に $-C-OH$ を含むものをカルボン酸とい

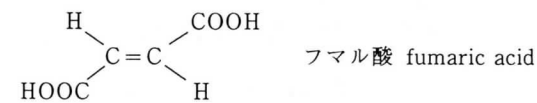
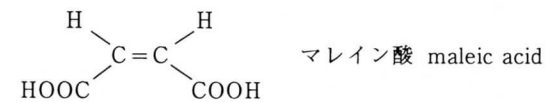
$$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{C} \\ | \\ \text{O} \end{array}$$
 います。名は体を現すので、カルボン酸は (弱) 酸で、アルコールと同様に分子内の $-COOH$ の個数によって、モノ mono, ジ di ……などと呼ばれます。また炭素原子間に単結合のみのもの (=飽和) と、二重結合、三重結合を含むもの (=不飽和) とに分類します。

- HCOOH ギ (蟻) 酸 formic acid
 CH₃COOH 酢酸 acetic acid
 CH₃CH₂COOH プロピオン酸 propionic acid

などが代表的な (飽和) モノカルボン酸です。一般に鎖状モノカルボン酸のことを脂肪酸といいます。食品に含まれているいわゆる「脂肪」はこれを含んでいます。(後述)

代表的なジカルボン酸には

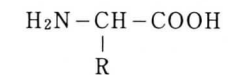
- (COOH)₂ シュウ酸 oxalic acid
 HOOC-CH₂-COOH マロン酸 malonic acid
 HOOC-CH₂-CH₂-COOH コハク酸 succinic acid



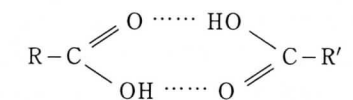
などです。

人は食事を摂ってそれを代謝しているわけですが、その過程で、TCA cycle と呼ばれる回路を回ってエ

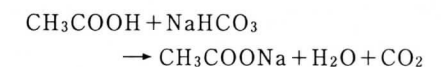
ネルギーを作っています。その途中に上に挙げたジカルボン酸のうち、コハク酸、フマル酸が関わってきます。食事といえば、最近やたらとアミノ酸 amino acid が宣伝されていますが、アミノ酸も一種のカルボン酸です。カルボン酸のうち分子内に $-NH_2$ (アミノ基) を含むものをアミノ酸といいます。アミノ酸については (注目度も上がってきていることすし) 回を改めて解説します。



アルコールの時にやったように、第一級アルコールを酸化すればカルボン酸が作れます。カルボキシル基 $-COOH$ 中には $-OH$ が含まれていますので、水素結合をしますから比較的沸点・融点は高いです。分子内で水素結合同士が引きあって会合します。この為、見かけの分子量が約 2 倍になることがあります。



(…水素結合) また、低級 (C の数が少ない) カルボン酸は水に溶けますが、高級になるともはや溶けなくなるのはアルコールと同様です。カルボン酸は弱酸だと述べましたが、弱酸の代表といえば炭酸ですが、カルボン酸は炭酸よりは強いので、例えば酢酸と炭酸水素ナトリウムとの反応は



となり CO₂ が泡として観察できます。これは $-COOH$ 基の検出反応として利用されています。(弱酸追い出し反応などといったカンジでしょうか。弱いものいじめです。)

エステル

受験では主にカルボン酸とアルコールを縮合させたものが出題されますが、一般に、酸とアルコールから水がとれたものをエステル ester といいま