「理系への数学」2004年9月号, Vol.37, No.9, pp62-65

セパタクローと試験問題

西山 豊

1. セパタクローボールを作ろう.

受験勉強には緊張と緩和が大切である. 大学入試の難問題に挑戦した後はパズルを楽しむとよい. ここに紹介する遊びは埼玉県の大沢重憲先生から教えていただいたものである.

タイ国でポピュラーな球技にセパタクローがある. 「セパ」はマレー語で「蹴る」,「タクロー」はタイ語で「ボール」という意味らしい. この競技に使うボールは籐（とう）製で直径が 12 センチで, とても丈夫で足で蹴って遊び, 日本の蹴鞠（けまり）に似たスポーツである（図 1). アジア大会では正式種目になっていて, こちらはプラスチック製である.

このセパタクローボールは数学では準正 32 面体と関係している. また, ただ遊びとして楽しいだけでなく, ノーベル化学賞の受賞で有名になったフラーレン分子 C_{60} やサッカーボールの構造にも関係している（図 2, 図 3). ここに紹介するのは, セパタクローボールと同じ形をしたものを荷造り用のテープを使って作ろうというのだ.

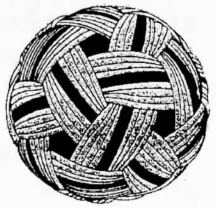


図 1. セパタクロー

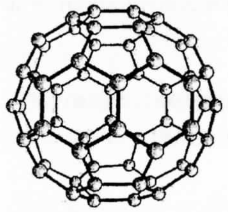


図 2. フラーレン C_{60}

図 3. サッカーボール

準備するものは, 荷造り用のテープ（ポリプロピレン製で PP バンドと呼ばれている）で幅が 15 ミリメートルのもので長さが 3~4 メートルあればよい. テープの長さを 56 センチメートルにして 6 本用意する. この長さと本数についてはあとで説明する. そして作業の途中にテープを止めるものとして洗濯バサミが 6 個あるとよい.

作り方のポイントとしては, つぎの 4 点が重要である.

(1) 1 本のテープは 25 センチを 2 周と 6 センチで回る. 2 周することによってボールの強度を高めるためである.

(2) 3 本のテープは三竦み（さんすくみ）で交わる（図 4). 上下の関係は逆のパターンもあるが, どちらかに統一しておくこと.

(3) 1 本のテープは交差するテープと上下, 上下…と交わる.

(4) 5 本のテープは正 5 角形の空洞を作る（図 5 では黒色の部分). テープ上で, 点線で示した部分は正 6 角形を作っていることがわかる.

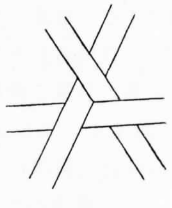


図 4. 三すくみ

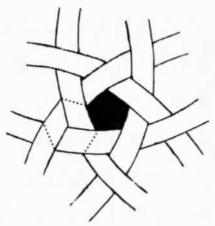


図 5. 正 5 角形を作る

以上の基本を念頭におきながら, 図 6 を参考にして手順を説明していこう.

まず, 3 本のテープで三竦み（さんすくみ）の関係をつくる（1). この関係はすべての交わりについて成立つので基本として覚えておくこと.

つぎに 5 本のテープで正 5 角形の空洞を作る（2). 洗濯バサミでテープを止める場合は放射線状にすると作業がしやすくなる. 洗濯バサミの数は 5 本である.

そして 6 本目のテープを通すわけであるが, どこから通してもよく, 三竦み（さんすくみ）と正 5 角形の空洞を作るということを忘れなければよい. 6 本目のテープは灰色で示した. 2 個目の正 5 角形ができ（3), 3 個目の正 5 角形ができ（4), 4 個目の正 5 角形ができ（5), 5 個目の正 5 角形ができ（6), 6 個目の正 5 角形ができる（7).

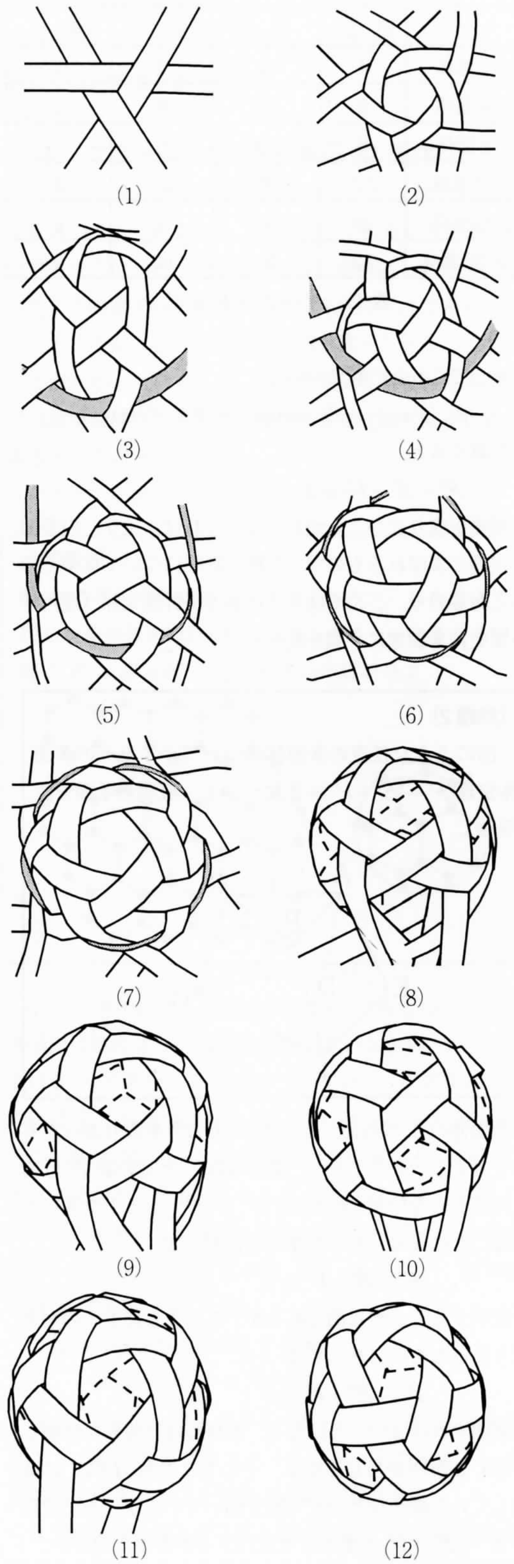


図 6. セパタクローボールの作成図

このとき, 6 つの正 5 角形の配置は, 最初に作った正 5 角形のまわりに 5 つの正 5 角形ができていることになる. また, 6 本目のテープ（灰色）は, 正 5 角形が 6 個できるとき閉じたテープとなり, 2 周目をまわっていることになる.

この時点では全体の半分までできたことになり, テープを止めるための洗濯バサミも必要でなくなってくる（7).

通しきっていない 5 本のテープを順番に上下, 上下と通していくとセパタクローボールが完成したことになる（8)～(12).

2. 正多面体は何個できるか？

セパタクローボールは, 紙と鉛筆で数学を解くのではなく, 手指を動かして作業するので数学を実感できるし, 空間図形を理解できるといった要素がある. また空間図形の問題として出題できそうな問題が沢山あるので, それを紹介しよう.

多面体には正多面体と準正多面体とがある. 多面体を構成する要素が 1 つの正多角形であるとき正多面体, 構成する要素が 2 つ以上の正多角形であるとき準正多面体という.

そして, 正多面体は 5 個存在することが知られている. 正 4 面体, 正 6 面体, 正 8 面体, 正 12 面体, 正 20 面体がそれである（図 7). 正多面体は 5 個あって, 5 個しか存在しないことが証明されているが, これらのことは暗記して覚えるものだろうか. そうではなく, 少し考えれば簡単に自分でも証明できるので, それを示そう [(1), (2)].

[問題 1] 正多面体は 5 個しかないことを証明せよ.

(証明)

正 n 角形が正多面体の 1 つの頂点に m 個あつまってできるものと考えて証明してみよう.

正 n 角形の 1 つの頂角は $180° - \dfrac{360°}{n}$ である. 1 つの頂点に正 n 角形を m 個あつめたとすると, 頂点にあつまる頂角の合計は 360° より小さくなければならないから,

$$\left(180° - \frac{360°}{n}\right) m < 360°$$

となる. これを整理して,

$(m-2)(n-2)<4$　（ただし n, $m \geqq 3$）

となる．

これを解いて，

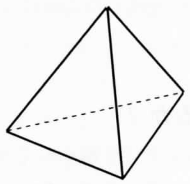
$n=3$ のとき $m=3$, 4, 5（正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体）

$n=4$ のとき $m=3$（正 6 面体）

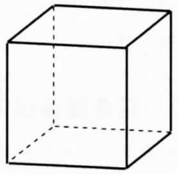
$n=5$ のとき $m=3$（正 12 面体）

の解が得られる．（証明終）

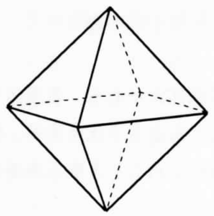
以上のことは各自，確かめよ．



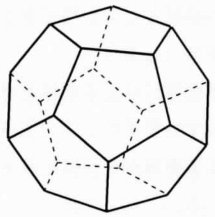
(1)　正 4 面体



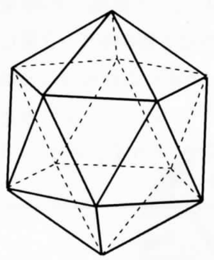
(2)　正 6 面体



(3)　正 8 面体



(4)　正 12 面体



(5)　正 20 面体

図 7．5 つの正多面体

3．オイラーの多面体定理

正 4 面体は正 3 角形が 4 個，正 6 面体は正 4 角形が 6 個，正 8 面体は正 3 角形が 8 個，正 12 面体は正 5 角形が 12 個，正 20 面体は正 3 角形が 20 個でできている．また準正 32 面体は正 5 角形が 12 個，正 6 角形が 20 個の合計 32 個でできている．

正多面体，準正多面体について，面（Face），辺（Edge），頂点（Vertex）の数を書き上げると表 1 のようになる．

	面（F）	辺（E）	頂点（V）	F-E+V
正 4 面体	4	6	4	2
正 6 面体	6	12	8	2
正 8 面体	8	12	6	2
正 12 面体	12	30	20	2
正 20 面体	20	30	12	2
準正 32 面体	32	90	60	2

表 1．$F-E+V=2$

そしてこれらの数について

面（Face）－辺（Edge）＋頂点（Vertex）

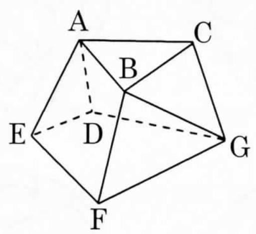
を計算すると，

$$F-E+V=2$$

の関係が成り立つことがわかる．これはオイラーの多面体定理とよばれるもので，定理の証明については多くの本にあるので，ここでは手近にある矢野健太郎『幾何学の歴史』を参考に手順を述べる[3]．

［問題 2］

図のような任意の多面体についてオイラーの多面体定理 $F-E+V=2$ について，証明の手順を説明せよ．



多面体の 1 つの面，たとえば ABC を取り去ったものを考える．そうすると，頂点の数 V と辺の数 E は前とは変わらないが，面の数は $F'=F-1$ と 1 つ減っていることになる．もとの多面体に対して

$$F-E+V=2$$

を証明することが目的であるが，このように 1 つの面を取り去ったものに対しては

$$F'-E+V=1$$

を証明すればよいことになる．多角形は 3 角形に分割しておくと証明が易しくなる．そしてこの面 ABC に隣接している面をひとつずつ取り除いていくが，その過程で $F'-E+V$ の量がどう変化するかを追えばよい．

そして最後に 1 面（3 角形）だけが残り，これは

$$F'-E+V=1-3+3=1$$

が成り立っていることがわかる．（証明終）

詳しくは前掲書を参考のこと．

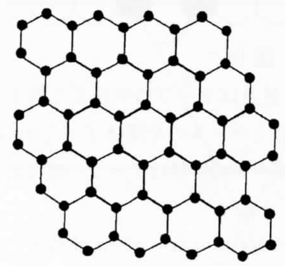
4．フラーレン分子と準正 32 面体

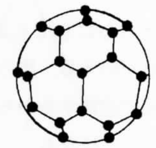
このオイラーの多面体定理がフラーレン分子 C_{60} の発見につながったということを知っているだろうか[4]．化学者たちは当初，炭素原子が 60 個の新しい分子について，その原子の配置モデルを正 6 角形だけで考えていた．ところが，この方法では球面を覆うことができないことがわかったのである．化学式でいうなら六員環だけでは球面は閉じなく，五員環の存在が理論的にも必要であるということだ．

そこで，このことを問題としてみた．

［問題 3］

60 個の原子から成るグラファイトのシートを曲げて閉じた多面体を作れないことを，オイラーの多面体定理　$F-E+V=2$　を用いて証明せよ．





60 個の原子に対して頂点の数は 60 である（$V=60$）．各頂点は他の 3 つの頂点を共有しているから，1 つの頂点は 3 つの「半分の辺」と結びついている．なぜなら 1 つの辺は 2 つの頂点で共有されているから．したがって，辺の総数は 90 である（$60 \times 3 \div 2 = 90$, $E=90$）．すべての面が 6 角形だとすると，1 つの辺は 2 つの面（1 つの辺の両側に 1 つずつ）のそれぞれの 6 分の 1 を構成しているから（$90 \times 2 = 180$, $180 \div 6 = 30$），面の総数は 30 である（$F=30$）．

これらの値を左辺に代入すると，

$$F-E+V=30-90+60=0$$

となり，右辺（$=2$）に等しくない．したがって 6 角形ばかりの面であるグラファイトのシートからは C_{60} の多面体を作ることは不可能である．（証明終）

正多面体は 5 個しか存在しないことは先ほど述べたが，構成する正多角形の条件をゆるめて，二つ以上の正多角形を認めたものに準正多面体というのがある．この代表的なものが準正 32 面体で，これは球にもっとも近い準正多面体でサッカーボールとしても知られている．

フラーレン分子は C_{60} と表現しているが，これは 60 個の炭素原子が多面体の頂点に配置されているためで，数学でいう準正 32 面体と同じものである．準正 32 面体は面の数に注目した表現であって，頂点の数が 60 個，辺の数が 90 個あり，オイラーの公式はつぎのようになる．

$$F-E+V=32-90+60=2$$

図 8．準正 32 面体

5．正 5 角形と正 6 角形の数

準正 32 面体は，正 5 角形が 12 個，正 6 角形が 20 個の合計 32 個でできていることがわかっているが，私は以前に，サッカーボールの写真を見ながら正 5 角形の数と正 6 角形の数を求めよという問題を出した[5]．これはなかなかいい問題で，入試問題としては最適ではないかと思っているので，それを再録しよう．

［問題 4］

サッカーボールは正 5 角形と正 6 角形の個数が合計 32 個でできている．写真から得られる情報だけで，それぞれの個数を求めよ．

ユニークな解答がたくさんあったが，オーソドックスな解答を示しておこう．

正 5 角形の数を x 個，正 6 角形の数を y 個とする．合計が 32 個だから，

$$x+y=32$$

となる．もうひとつの式をどのように導入するかが問題であるが，面に注目するか，辺に注目するか，頂点に注目するかで式ができる．

［面に注目］

1つの正5角形のまわりには5個の正6角形があるから，重複を許せば正6角形の数は全体で$5x$個になる．一方，正6角形のまわりには3個の正5角形があるから，$5x$は3度重複されて数えられたことになる．そこで，$5x$を重複度の3で割れば正6角形の個数となる．

$$y=\frac{5x}{3}$$

これを解いて$x=12$，$y=20$となる．

［辺に注目］

正5角形のまわりにある辺の数は5本だから全部で$5x$本ある．正6角形のまわりにある辺の数は6本だから全部で$6y$本ある．正6角形には正5角形がひとつおきにしか隣接していないので，このうちの半分が正5角形のまわりの辺の数に等しくなる．

$$5x=\frac{6y}{2}$$

これを解いて$x=12$，$y=20$となる．

［頂点に注目］

正5角形の頂点は5個だから全部で$5x$個ある．正6角形の頂点は6個だから全部で$6y$個ある．ひとつの頂点に着目すると正5角形が1個，正6角形が2個隣接している．正6角形の頂点の数$6y$は正5角形の頂点の数$5x$の2倍になっているから，

$$5x:6y=1:2$$

これを解いて$x=12$，$y=20$となる．**(証明終)**

以上，いずれの解法も複雑な式はでてこないが，この式を導入するには空間を読む力が特に大事であるように思える．機械的な計算が入試問題に占める割合が多くなっているが，数学的な考え方を試す問題も必要ではないだろうか．

6．テープの幅とボールの半径

セパタクローボールをPPバンドで何個も作っていると，もっと大きいものが作れないかと欲が出てくる．そこでテープの幅や長さとボールの半径との関係を調べてみた[6]．

> **［問題 5］** セパタクローを作るテープの幅がdであるとき，そのテープがボールを1周したときの長さLを求めよ．ボールの半径が2倍のものを作るならどうすればよいか考えよ．

テープがボールを1周するのは，図9に示すようにAからBまで正6角形が10個分を通過したことになるから，周の長さLは

$$L=10\sqrt{3}\,d$$

となり，係数の値は約17.3である．この関係式はテープの長さをどのくらいに見積もればよいかの参考になる．テープの幅が15ミリであるなら，周の長さは約26センチとなる．

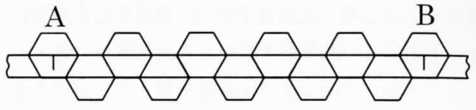


図9.

また，見方を変えてテープは準正32面体でいう図10のようなコースを通過すると考えれば，周の長さL'は

$$L'=\left\{8+\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)\right\}d$$

のようになる．係数の値は17.4になり先ほどの値より少し大きめである．

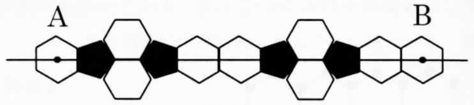


図10.

どちらにしても周の長さはテープの半径に比例することがいえる．周の長さとボールの半径は$L=2\pi r$の関係で比例するから，ボールの半径はテープの幅に比例することになる．

半径が2倍の大きさのセパタクローボールを作りたいなら，長さが2倍のテープを用意するのではなく，テープの幅が2倍のテープが必要だということだ．

高校での数学は教科書や参考書から離れないことが多い．もういちど原点に立ち返って，ものを作りながら数学を勉強するというのはどうだろうか．遠回りのような気もするが，意外とこれは近回りかもしれない．

参考文献

(1) 村上一三『美しい多面体』明治図書，1982

(2) 一松信『正多面体を解く』東海大学出版会，1983

(3) 矢野健太郎『幾何学の歴史』NHKブックス，1972

(4) ジム・バゴット『究極のシンメトリー・フラーレン発見物語』白揚社，1996

(5) 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』1994.9

(6) 西山豊「セパタクローボールの半径」『数学教室』2001.12

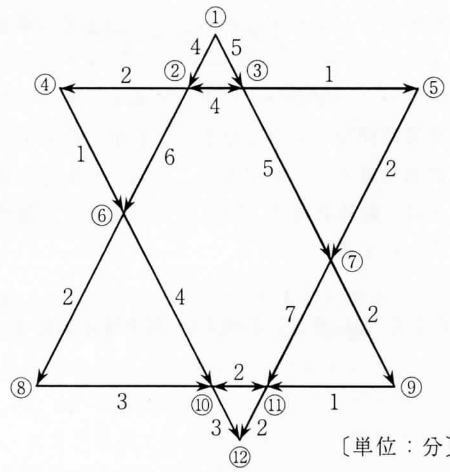
（にしやまゆたか／大阪経済大学）

高校生のための OR 入門 ⑤
―Operations research―

木下栄蔵

前回は高校生のためのOR入門講座として動的計画法（DP）について説明した．今回は，動的計画法の応用例として最短経路の問題を説明する．

あるとき，私は，道に迷い，**第1図**に示すような道路で右往左往していた．現時点は①で目的地は⑫である．



〔単位：分〕

第1図

さて，ノード①から出発して，ノード⑫に到達する場合，最小時間で到達する経路を模索し，かつそのときの所要時間を求めてみよう．ただし，各ノード間の所要時間は，ノードを結ぶリンクの上に示したとおりで，ノード②・③の間と⑩・⑪の間を除いて，矢印方向の一方通行である．ここでノードとは点を表し，リンクとは線を表している．

この問題は，動的計画法（ダイナミック・プログラミング）を用いると簡単に解ける．この問題を解くにあたり，まず次のような関数$h(m)$を定義する．

$h(m)$：ノードⓜ $(m=1,2,\cdots,12)$からノード⑫まで動くのに必要な最小時間

関数$h(m)$によって，この時間の解は，$h(1)$の値を見つけることに帰着される．ところでノードⓝからノード⑫にいたる最小時間は$h(n)$であるから，ノードⓜとノードⓝを結ぶ道を移動するのに，t_{mn}分かかるとすると，ノードⓜからノードⓝを経由してノード⑫に到達するのに要する最小時間は，

$$\min_n\left[t_{mn}+h(n)\right]$$

となる．ノードⓜからノード⑫にいたる最短経路を見つけるのであるから，$t_{mn}+h(n)$が最小になるようにノードⓝを決めなければならない．したがって，最適性の原理（前回に説明している）を適用すると，$h(m)$は，

$$h(m)=\min_n\left[t_{mn}+h(n)\right]$$

で与えられる．したがって，$h(1)$を求めるには，ノード⑫から始めて，ノード①に戻ってくる計算を順次つみあげていけばよいことになる．つまり，初めに$h(12)$を求め，次に$h(11)$，$h(10)$，……と進んで，最後に$h(1)$を求めるのである．

さて，明らかに，$h(12)=0$であるから，次に$h(11)$の値を計算する．

$$\begin{aligned}h(11)&=\min_n\left[t_{11,n}+h(n)\right]\\&=\min\left[t_{11,12}+h(12),\ t_{11,10}+h(10)\right]\\&=\min\left[2+0,\ 2+h(10)\right]\end{aligned}$$

$h(10)>0$だから，

$$h(11)=2$$

である．したがってノード⑪からノード⑫への最短経路は，ノード⑪→ノード⑫である．

同様にして$h(10)$は，

$$\begin{aligned}h(10)&=\min_n\left[t_{10,n}+h(n)\right]\\&=\min\left[t_{10,12}+h(12),\ t_{10,11}+h(11)\right]\\&=\min\left[3+0,\ 2+2\right]=3\end{aligned}$$

である．したがってノード⑩からノード⑫への最短経路は，ノード⑩→ノード⑫である．

また，$h(9)$を求める．

$$\begin{aligned}h(9)&=\min_n\left[t_{9,n}+h(n)\right]=t_{9,11}+h(11)\\&=1+2=3\end{aligned}$$

したがってノード⑨からノード⑫への最短経路は，ノード⑨→ノード⑪→ノード⑫である．

また，$h(8)$を求める．