

北大高校生講座  
数学の並木道

中村郁 監修  
A5判/132頁  
定価：1785円  
日本評論社 発行

北海道大学数学科では1994年から道内の高校生を対象に公開講座を開いている。その講演記録の中から選んでまとめたのがこの本である。タイトルが並木道とあるので気楽に読めるのかと思ったが、数学者を目指す者との入門書であり、ざっと読むだけでも1週間かかった。

第1章では数学の問題を解くのに有用な最小値原理と普遍量の2つの考え方を紹介しながら、問題を解く楽しみを説明している。発展としてシルベスターの問題が紹介され、また基石を用いた問題もある。第2章ではカオスについて紹介している。初期値が少しずれただけでその後の軌道が予測不可能であるというカオスの初期値鋭敏性について、ロジスティック写像、ローレンツ方程式を例に説明している。カオスは複雑系としても知られているが、予測不可能な自然現象や社会現象を解明しようとする数学者の試みでもある。第3章では1995年にウイルスとテイラーによって証明されたフェルマー予想について説明している。数の合同による解の分類ということで、剰余による分類が数学でいかに有効であるかを

示すとともにフェルマーの小定理やウィルソンの定理の説明がある。

第4章では位相幾何学(トポロジー)の説明で平面折れ線の分類がおこなわれている。ガウス指数とホイットニーの定理の説明があり、トポロジーはメビウスの帯、クラインの壺や四色問題とも関係している面白いの



ではないだろうか。第5章ではユークリッド平面の曲線ということでおもに曲率の話がされている。関数を用いて説明する微分幾何学分野であり、曲率を連続的に変化させるためのクロソイド曲線の紹介がある。第6章では3次方程式の解の分類から特異点の説明がされている。解を視覚的に見せるアニメーションの方法や、解の分類に関するカスプ曲線、ルネ・トムによるカタストロフ理論の紹介へ

と話は発展する。第7章では数理ファイナンスで金融市場モデルを1期間二項モデルという確率モデルを使って予測し、ポートフォリオ、デリバティブなど応用数学の説明がされている。

これら7つの話題はいずれも現代数学があついている内容で、高校生にとっては耳慣れない用語ばかりであろう。その目指すものを頂上とすれば、この本はそのふもとを解説しているにすぎない。問題と答えがセットになっている高校生にしてみれば、なぜすべてを説明できないのか疑問を持つかもしれないが、それだけ現代数学が進んでいるということだ。

高校数学と大学数学は根本的に違う。数学のテストで満点をとっていても大学では通用しない。大学数学は数学のセンスと根気の両方が要求される。用語など基礎訓練で疲れ多くの者が脱落してしまう。抜け道はなく、学問に王道なし、というところだろうか。果たしてそこまでする価値があるのだろうか?その答えは数学のロマンに魅せられてしまった数学者たちに公開講座で直接聞いてみるしかない。

(西山豊/大阪経済大学)

Dr. hongo の数理科学ゼミ — 2004年10月号の問題 —

**第38問**  $n$ 個の玉を3つの袋に分配する。玉と袋はすべて同じで区別はないとする。このとき、空袋が1つもない分配方法が $a_n$ 通り、袋の中の玉の数がすべて異なっている分配方法が $b_n$ 通りあるとする。 $a_n = b_n$ を証明せよ。 2004年度大阪学院大学情報学部第3問改題

【応募方法】e-mailの表題(subject)に04/10kaitoと書き、初めに、氏名、年齢、学校名、学年、住所、電話番号、志望校を明記の上、math@hng.ms246.netへ、10月12日(火)までにお送り下さい。(解答送付はe-mailのみとさせていただきます。)解答の発表は2004年11月号で、正解者の発表は11、12月号で行います。なお、html形式のもの、添付ファイルがついているものは自動的に削除されますのでご注意ください。

Dr. hongo の数理科学ゼミ -04年9月号の問題-

**第37問** 実数 $a, b$ および2次正方行列 $J$ があつて、 $A = aE + bJ, J^2 = -E$ を満たすとする。ここで $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。 $A$ の固有値を $\alpha, \beta$ で表せ。特に $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、 $A$ の固有値を求めよ。なお、行列 $A$ の固有値とは $A\vec{v} = k\vec{v}$ かつ $\vec{v} \neq \vec{0}$ を満たす $\vec{v}$ が存在する $k$ のことである。 2004年度早稲田大学理工学部第2問(2)改題

(解答)

(step 1) ( $J$ の固有値)  
 $J^2 = -E$ より固有値 $k$ は $k^2 = -1$ をみます。  
 $\therefore k = \pm i$ が必要。

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, J\vec{e} = \vec{f} \text{ とおくと,}$$

$$J\vec{f} = J(J\vec{e}) = J^2\vec{e} = -E\vec{e} = -\vec{e}.$$

$$\vec{v} = \vec{e} \mp i\vec{f} \text{ とおくと, } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ である.}$$

$$J\vec{v} = J\vec{e} \mp iJ\vec{f} = \vec{f} \pm i\vec{e} = \pm i(\vec{e} \mp i\vec{f}) = \pm i\vec{v}.$$

よって、 $J$ の固有値は $\pm i$ 。

(step 2) ( $aE + bJ$ の固有値)

上で求めたベクトルを $\vec{v}$ とおく。

$$(aE + bJ)\vec{v} = aE\vec{v} + bJ\vec{v} = a\vec{v} \pm bi\vec{v} = (a \pm bi)\vec{v}$$

よって、 $A = aE + bJ$ の固有値は

$a \pm bi$  …… [答]

(step 3) ( $a, b$ の導出)

$A = aE + bJ$ とおくと

$(A - aE)^2 = b^2J^2 = -b^2E$ . 成分を代入すると、

$$\begin{pmatrix} (-1-a)^2 & -2 \\ 4 & 3-a \end{pmatrix}^2 = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 1+a-8 & 4a-4 \\ -4a+8 & (3-a)^2-8 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1-a & -2 \\ 4 & 3-a \end{pmatrix}^2 = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} (1+a)^2-8 & 4a-4 \\ -4a+8 & (3-a)^2-8 \end{pmatrix} = -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

両辺の成分比較をして、 $a=1, b=\pm 2$ .

(step 4) ( $J$ の導出)

$a=1, b=2$ のとき、

$$2J = A - E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ よって,}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a=1, b=-2$ のときは、この行列の $-1$ 倍が $J$ となる。

注意 この $J$ は確かに $J^2 = -E$ を満たしている。

(step 5) ( $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値)

$a \pm bi = 1 \pm 2i$ より (step 2) から $A$ の固有値は、 $1 \pm 2i$  …… [答]

【お願い】 解答は添付ファイルにせず、本文中に挿入して下さい。そうしないと、すべて自動的に削除されます。

Dr. hongo の数理科学ゼミ

2004年8月号(問36)の正解者

唐津裕貴(淳心1), 中田浩徳(函館中部2), 関  
総一郎(ラ・サール2), 市川幸平(大手前2)  
山田良太(加茂2), 宮川昌悟(芝2), 津田琴  
江(フェリス2), 大野健太(開成3), 長谷川  
保拓(室蘭栄3), 岡田佳子(普連土3), 安藤  
裕輔, 池内なぎ子(筑附卒), 大貫彩華(東洋  
英和卒), 賀川隆太, 草野善晴(慶應志木卒),  
黒川友哉(広島修道卒), 鮫島未央(国学院卒),  
諏訪さくら(都立城南卒), 永峰翔太(志学館  
卒), 西山剛史(静岡聖光卒), 松村汎(教員),  
石原暁秀(会社員), 青島昌平, 以上2+23名

2004年9月号(問37)の正解者

長谷川保拓(室蘭栄3), 下鳥晃一(浦和西卒),  
松田康雄(教員) 以上3名