積み木と調和級数

西山 豊

1. 積み木を1個分以上ずらせるか

文部科学省のサイエンス・パートナーシップ・プログラム事業（SPP事業）というのがあって，その中の研究者招へい講座で，私は2003年秋，滋賀県の虎姫高校で「数学のたのしみ」というタイトルで3回講演する機会を得た．生徒たちは受験の数学を日夜猛勉強しているが，その成果が成績に反映されればよいが，そうでない場合は，いったい数学は何の役に立つのだろうか，数学を勉強する意味があるのだろうか，と疑問を持つこともあるだろう．

数学は古代エジプト，ギリシャ時代から生活のためにあり，受験のためのものではなかった．受験さえ意識しなければ数学ほど楽しいものはない．このことを伝えたくて，いくつかの興味のあるテーマを紹介した．ここに述べる積み木と調和級数はその一例で，以前に本誌でも掲載されたが，ずいぶん前のことであり，古くなったとはいえ内容はいまでも十分通ずる話題であるので紹介したい[1]．

図1のような積み木の問題を考えてみよう．積み木を何個か重ねて置いていき，いちばん下の積み木といちばん上の積み木の位置を1個分以上ずらせることができるかという問題だ．

これを聞いてほとんどの人は，それはできないと即答する．できるかできないのかを考えてみようとせず結論を先に出してしまうのはデジタル時代の反映だろうか．できるかできないか，それ以外にわからないということもあるのだが，あいまいな答えを極度に嫌うのである．これは手品でもトリックでもなく，答えは必ずあることを約束しておこう．

ずらして積みなさいというと人は均等にずらして積む．でも均等にずらせば積み木は倒れてしまう．

均等にずらす行為もデジタル思考の現れだろうか．

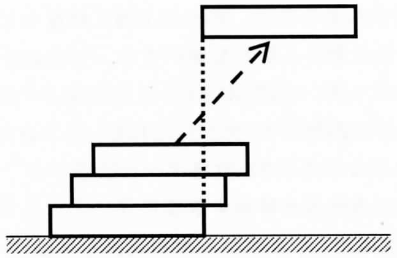

図1．1個分以上ずらせるか

いきなり答えを求めようとせず2つから始めてみよう．ずらせる距離が$\frac{1}{2}$であることは直観でわかる．さて3つ目が問題である．3つ目の積み木を右手に持って考えてみよう．ほとんどの人はこの積み木を2つの上に積もうとするが，どうしても倒れてしまう．駄目であるならあきらめも大事で，違うアプローチを模索すべきである．これを実現するには発想の転換が必要だ．

2. 重心の計算

これは重心の計算問題である．紙と鉛筆で思考するより，実際に積み木を用いて試行錯誤的に答えを求めたほうが意外と早くわかるかもしれない．

ここでヒントを与えよう．積み木は上に積むものですか？ このヒントに読者は戸惑うことだろう．積んで行くから積み木だという固定観念があるからだ．積み木は上に積むのではなく下にすべり込ませるのだ．3つ目の積み木をいちばん下におき，上2つの関係を固定したまま徐々にずらしていけば，$\frac{1}{4}$までずらすことができる．以下，4つ目の積み木は$\frac{1}{6}$ずらしてその下におき，5つ目の積み木は$\frac{1}{8}$ずらしてその下におく．$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{8}$を足せば1を超える．つまり，いちばん下の積み木といちばん上の積み木は1個分以上ずらせて積めたことになる．

以上のことを図2～図4を参照しながら重心の計算として数式で確認していこう．まず，積み木①と積み木②について考えてみる．これは，明らかに$\frac{1}{2}$しかずらすことができない（図2）．

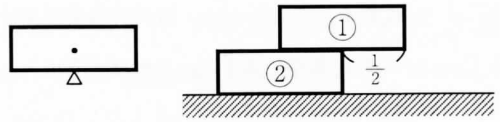

図2．$\frac{1}{2}$ ずらす

次に積み木③をこの下に置くわけだが，積み木①と積み木②をあわせた重心を考える（図3左）．積み木③は，この重心までずらせるから，ずらす距離をxとしてモーメントを求めてみる．モーメントは，［重さ］と［うでの長さ］の積であるから，積み木①のモーメント（時計回り）は$1\times x$，積み木②のモーメント（反時計回り）は$1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$となり，これらが等しいから，

$$1\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

これを解いて$x=\frac{1}{4}$となる．つまり，積み木③のずらす距離は$\frac{1}{4}$であることになる（図3右）．

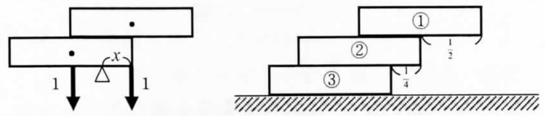

図3．$\frac{1}{4}$ ずらす

次に積み木④を置くわけだが，積み木①から積み木③までをあわせた重心を考える．積み木①と積み木②をあわせたものと，積み木③から重心を求める（図4左）．積み木①と積み木②をあわせるので重さは2となる．積み木①と積み木②のモーメント（時計回り）は$2\times x$，積み木③のモーメント（反時計回り）は$1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$となり，これらが等しいから，

$$2\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

これを解いて$x=\frac{1}{6}$となる．つまり，積み木④のずらす距離は$\frac{1}{6}$であることになる（図4右）．

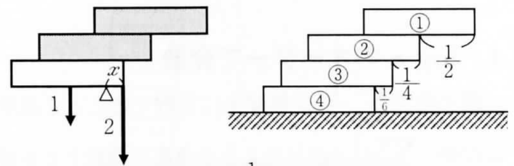

図4．$\frac{1}{6}$ ずらす

ずらす位置が$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$とならずに$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$となるには重心のしっかりした計算が必要である．

一般に，n個の積み木の重心を求めてみよう．これは，$(n-1)$個の積み木と1個の積み木の重心として求まるから，$(n-1)\times x=1\times\left(\frac{1}{2}-x\right)$より

$x=\frac{1}{2n}$となる．

これを整理すると，ずらす位置を

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \cdots,\ \frac{1}{2n},\ \cdots$$

としていくと積み木を倒さずに積んでいけるのである．

各項の逆数の作る数列が等差数列であるものを調和数列という．$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$や，$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots$は調和数列である．調和数列は，古代ギリシアのピタゴラス学派が和声の理論を研究したときに使われたといわれており，調和数列の名もこれに由来している．

調和数列を合計したものが調和級数で，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

とも書ける．ここで，この級数の値を計算してみよう．

$\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1}{4}=0.25$, $\frac{1}{6}\approx0.167$, $\frac{1}{8}=0.125$ より

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\approx1.042>1$$

これで積み木が5個あれば1個分以上ずらせることがわかる（図5）．

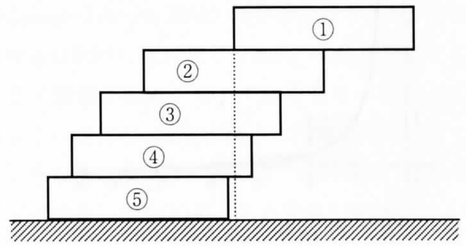

図5．1個ずらし

3. 収束と発散

高校から大学にかけての『微分・積分』の教科書の中に数列と級数の章がある．そこでは必ずといっ

てよいほど，次の例題が出ている．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

は発散し，

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$

は収束する．

n を無限大としたとき，数列の一般項が0に収束しても無限級数が発散することもあるという興味深い例題である．収束と発散は，積分をすることによって概略を知ることができる．つまり，

$$\sum\frac{1}{n}\approx\int\frac{dx}{x}=[\log x]$$

$$\sum\frac{1}{n^2}\approx\int\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]$$

となり，前者はlogのオーダーで発散し（図6），後者は収束する（図7）．

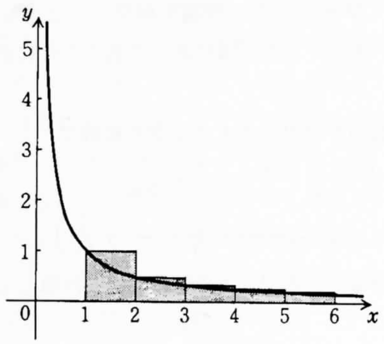

図6. $y=\frac{1}{x}$

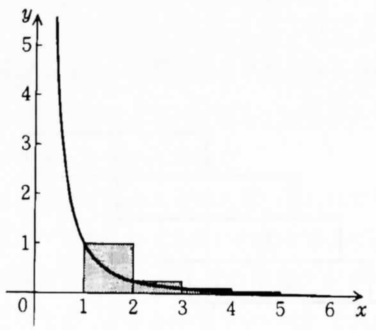

図7. $y=\frac{1}{x^2}$

一般に，無限級数 $\sum\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ は，$p\leq 1$ ならば発散し，$p>1$ ならば収束する．また，$\sum\frac{1}{n^2}$ は $\frac{\pi^2}{6}$ に収束することも知られている．また，$\sum\frac{1}{n}$ が収束するかどうかは，数列の収束に関する Cauchy の判定条件で求まる．これは大学に入ってから勉強することだろう．

数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ の最初の n 項の和を

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

とする．

級数 $\sum a_n$ が収束するための必要十分条件は，任意に与えられた正の数 ε に対して N を十分大きくとれば，$m>n>N$ であるすべての n, m に関して

$$|S_m-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon$$

が成立することである．

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

とおく．n をいくら大きくとっても，

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$
$$>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{個}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となり，Cauchy の収束判定条件を満たさない．よって $\sum\frac{1}{n}$ は発散する．

ε や N の意味が難しいが高校生の力で次のようにも証明できる．項の数 $2n$ を2, 4, 8, … のように2のベキ乗にとっていくと，

$$|S_2-S_1|=\frac{1}{2}$$
$$|S_4-S_2|=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$|S_8-S_4|=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$
$$|S_{2n}-S_1|=|S_{2n}-S_n|+\cdots+|S_8-S_4|$$
$$+|S_4-S_2|+|S_2-S_1|$$
$$>\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

となり，右辺の項がいくらでも大きくなるので発散することがわかる．

4. $\log n$ のオーダーで発散

調和級数 $\sum\frac{1}{n}$ が無限大に発散することを説明したが，$\sum\frac{1}{2n}$ がどのような速度で発散するか詳

しく調べてみよう．ずれの合計である $\sum\frac{1}{2n}$ の値をパソコンで数値計算してみると

$n=4$ 　のとき $\sum\frac{1}{2n}=1.0417>1$

$n=31$ 　のとき $\sum\frac{1}{2n}=2.0136>2$

$n=227$ のとき $\sum\frac{1}{2n}=3.0022>3$

となった．級数が無限大に発散するとはいえ非常に遅い速度である．

ここで，$\sum\frac{1}{n}$ を関数 $y=\frac{1}{x}$ の積分と比較すると，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{dx}{x}$$
$$<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

の不等式が成立する．

$\int_1^n\frac{dx}{x}=[\log x]_1^n=\log n$ より，

$$\frac{1}{2}\left(\log n+\frac{1}{n}\right)<\sum\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}(\log n+1)$$

となり，$n\to\infty$ のとき，$\sum\frac{1}{2n}$ は $\frac{1}{2}\log n$ のオーダーで発散することがわかる．

いちばん下の積み木が余分に1個いるので，必要な積み木の数は実際は $n+1$ 個である．積み木1個分ずらすには5個で充分であるが（4+1），積み木2個分ずらすには32個いり（31+1），積み木3個分ずらすには228個もいることになる（227+1）．図8に示したのは32個を積み上げた形であるが，現実に32個も正確にずらしながら積み上げることは不可能で，これはあくまでパソコンで描いた理論上の話しである．

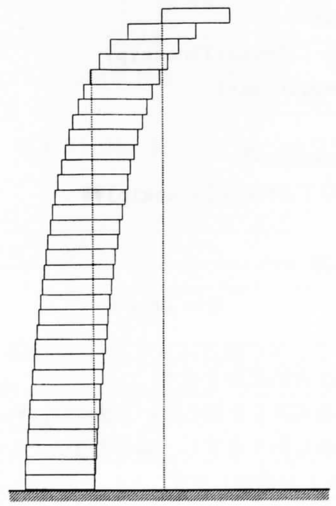

図8. 2個ずらし

また図9は関数 $y=\frac{1}{x}$ と，これを積分した関数 $y=\log x$ のグラフである．log関数を時計回りに90度回転させ，左右反転させると図8の積み木の積み上げ問題になっている．読者はこれを確かめよ．

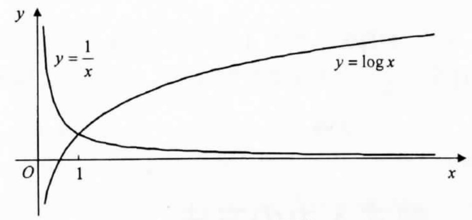

図9. log関数

以上，調和級数 $\sum\frac{1}{n}$ を積み木問題と対応づけることができた．このような問題なら数学は解いていても楽しくなるはずだ．高校や大学での数学は進めば進むほど現実から遠ざかっていき，ときどき自分を見失いそうになる．そのようなとき忘れてはならないのは現実との対応であろう．積み木の問題は重心の計算問題であり，調和級数とも関係してきわめて数学的であるが，問題を解くことに限ると複雑な数式はいっさい出てこない．論理的思考法と発想の転換だけが重要なのだ．皮肉な事に理科系の大学生はこの積み木問題が解けない．彼らは調和級数が無限大に発散することを数式で証明できるが，現実の積み木問題が解けないのだ．これは現代の教育の盲点でもある．

私が積み木問題を知ったのはジョージ・ガモフ（George Gamow, 1958）の著書からである．彼は，研究者は同時に教育者でもあれ，学生が感動する前にまず教師が感動しなくてはならないと言っているように思える．読者が積み木問題を確かめたくて手ごろな積み木がない場合は，百科事典10冊またはビデオテープを10本くらい用意して試すとよい．

参考文献

(1) 西山豊「積み木問題」『BASIC 数学』1991.2

(2) G.ガモフ，M.スターン著，由良統吉訳『数は魔術師』（白揚社，1958）

（にしやまゆたか／大阪経済大学）