◆ 面積以外

このように考えると，積分とは面積を求めることに限定されないものだといえます．つまり，x とその関数 $f(x)$ に対して，

$f(x)$ と「x の幅」Δx の積

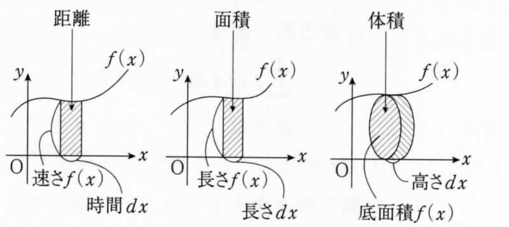
が考えられるとき，その積分も考えられるといえます．

たとえば，

●時間 x と速さ $f(x)$ に対して，
$f(x)$ と「x の幅」の積は，速さ×時間＝距離より，$\int_a^b f(x)\,dx$ は移動距離を表します．

●長さ x と長さ $f(x)$ に対して，
$f(x)$ と「x の幅」の積は，幅×縦＝長方形の面積より，$\int_a^b f(x)\,dx$ は面積を表します（上述）．

●高さと底面積 $f(x)$ に対して，
$f(x)$ と「x の幅」の積は，底面積×高さ＝柱体の体積より，$\int_a^b f(x)\,dx$ は体積を表します．



このようにみてくると，積分は無味乾燥な計算問題ではなく，1つ1つの式の意味を考えてみるとなかなか奥行きのあるものであることがわかります．

◆ いろいろな面積

積分の式の意味を読むという点に関して，もう1つの例として，「重積分」について考えてみましょう．

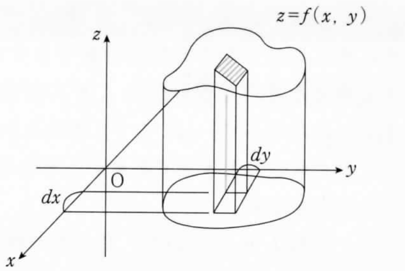
重積分とは，2つの変数 x, y の関数 $f(x, y)$ に関する積分で，

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy,\quad \iint_D f(x, y)\,dS$$

などと表されるものです．

その意味は，

xy 平面上の領域 D に対して，その領域を小さな領域 D_i に分けたとき，その小領域 D_i 内の点 (x, y) に対する関数 $f(x, y)$ の値と D_i の面積 S_i との積 $f(x, y)\cdot S_i$ を全部の小領域 D_I について足したもので，これは，底面積 S_i，高さ $f(x, y)$ の直方体の体積を全部足したものになるので，結局図のような体積を表すことになります．



この場合も，細分化した1つ1つの $f(x, y)\times S_i$ あるいは $f(x, y)\times \Delta x\Delta y$ を全部足したものが，（重）積分になります．

このようにみてくると，積分でやろうとしているのは，結局のところ，

「細かく分けて得られるある量を全部足すこと」

だといえます．

この「ある量」が面積だったり体積だったり距離だったりと，いろいろの場合が考えられることになります．

♣ 行きはよいよい…

ところで，積分の本領が，「細かく分けて得られるある量を全部足すこと」にあるとしたとき，次のような懸念が浮かびます．

その1――「細かく分けて全部足す」といったやり方はそれほど珍しいものではない．多少なりとも複雑な現象を相手にするときは，現象を単純化したり分けてみたりして調べた上で，それらを総合して結論を導く，といったやり方は，どちらかというと常套的な方法である．よって，どうしてこのようなやり方が積分を特徴づける性質であるのかわからない，といった懸念．

その2――一方，細かく分ければ分けるほど，計算が複雑になり，面積や体積を求めることがますます困難になるのではないか，という懸念．

これらの懸念が解消されるのは，積分と微分が裏と表の関係にあるということを考えたときです．

そこで，次回は「微分」についてみてみることにします．

（ふかがわ やすひさ）

数学を楽しむ

階段のスイッチ

西山　豊

1．疑問は身近に

数学は役に立っている．ところがほとんどの人はそれに気づかない．たとえば，ここに階段のスイッチがある．図1は自作した階段のスイッチの模型である．夕方になり暗くなって2階へあがるときは，1階のスイッチで踊り場の灯りをつけて2階にあがる．あがってしまうと電灯は必要ないので2階のスイッチで灯りを消す．つまり1階でも2階でも灯りを点滅できるといったスイッチのことは誰しも経験のあることだろう．これは立派な数学の応用で，2進法の原理から考え出された工夫である．

私たちの身の回りには数学の原理が応用されたものがたくさんある．ただ気づいていないだけである．階段のスイッチは確かに便利である．しかし，スイッチの原理などいちいち気にしだしたら生きていけない，というかもしれない．確かにそうかもしれない．しかし，数学は受験で生徒を苦しめるためにあるのではなく，私たちの生活をよくするためにあるものだということだけはわかって欲しい．

さて，この階段のスイッチ，いったいどうなっているのだろうか．最近はリモコンが大流行だから，リモコンだろうか．そうではない．また，暗くなるとセンサーが働いて自動的に点灯するものがあるが，そうでもない．私の世代が経験した<寝床スイッチ>のように1階のスイッチと2階のスイッチがつながっているのだろうか．漫画本を読みながらそろそろ眠ろうかというときに，立たずに消せるスイッチのヒモの工夫は活躍したが，そうでもない．電気の配線とスイッチの関係がそうなっているのだ．数学愛好家らしくエレガントに解答を求めてみたいものだ．

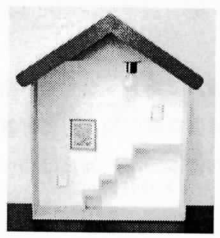


図1．階段のスイッチ（2階）

1階のスイッチは2つの状態がある．2階のスイッチも2つの状態がある．灯りはついている，ついていない，の2つの状態がある．2つの状態は2進数と関係しそうに思えるので，ここではまず，2進数について計算問題を考えておこう．

2．2進数と16進数

問1．10進数で61を2進数と16進数で表せ．

2)	61	余り
2)	30	1
2)	15	0
2)	7	1
2)	3	1
	1	1

61を2で割って商と余りを求める．61割る2は，商が30で余りが1である．30を2で割ると商が15で余りが0である．この作業を続けて，これ以上割り切れない，商が1になるまで上図のように計算の過程を記述していく．そして，太字の数字を矢印で示したように最後の商である1から始めて上に向かって余りの11101を読んでいく．つまり111101が2進数である．

16進数は2進数でいうと4桁分（4ビット分）となる．なぜなら $2^4=16$ であるから．そこで，111101を下位から4桁ずつ区切って16進数に変換すると容易にもとまる．11と1101にわけると，11は3であり，1101はDであるから，3Dが16進数表記である．

2進数の由来は数字を表す文字，これは数詞（すうし）と呼ばれている，が0と1の2個であるからだ．2進数だから数字の2も含まれると思われるが，0を含めて1ですでに2文字使っているので，2は2進数に含まれない．

10進数は0から9までの10個の数詞を使って数値をあ

らわす. 16進数の場合は, 数字を表す文字が16個使える. 10 個以上の数詞は英字のＡからＦまでが用いられている. 10 進数の 10 はA, 11 はB, 12 はC, 13 はD, 14 はE, 15 はFである. そして 10 進数の 16 は 16 進数では 10（イチゼロ）となる.

また 11 などを「じゅういち」などと言うと 10 進数の 11 と 2 進数の 11 に区別がつきにくいので, 2 進数の場合は 1 を「イチ」, 0 を「ゼロ」, 11 を「イチイチ」などと言うことが習慣的である. また, 10 進数, 2 進数, 16 進数の数値であることを示すために数字の右下隅に 10, 2, 16 の数字を添え字で書くこともある. 問 1 の答えはつぎのようになる.

$61_{10} = 111101_2 = 3D_{16}$

答えを一方的に求めてほっておかず, それが正しいかどうか吟味をしておくことも大切である. 求めた 2 進数を 10 進数に戻す方法はつぎのようになる.

$$
\begin{aligned}
&111101_2\\
&=1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0\\
&=32+16+8+4+0+1\\
&=61_{10}
\end{aligned}
$$

問 2. 2 進数の A＝1011 と B＝111 について加減乗除を計算せよ.

2 進数の四則演算はつぎのようになる.

$$
\begin{array}{r}
1011\\
+111\\
\hline
10010
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1011\\
-111\\
\hline
100
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1011\\
\times111\\
\hline
1011\\
1011\\
1011\\
\hline
1001101
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\\
111\overline{)1011}\\
111\\
\hline
100
\end{array}
$$

加　　減　　乗　　除

これらは10進数では A＝11, B＝7 とした場合の四則演算である. 各自, 確かめよ.

3. ブール代数と真理値表

問 3. 1 階でも 2 階でも点滅できる階段のスイッチの仕組みを考えよ.

普通のスイッチは片切スイッチとよばれ, オンにすると灯りがつき, オフにすると灯りが消える. しかし, 階段のスイッチはオンとオフの区別がない. 1 階と 2 階のスイッチの関係が灯りの点滅を決定するのである.

1 階のスイッチをＡとし, 2 つの状態を 0 と 1 で表し, 2 階のスイッチをＢとし, 2 つの状態を 0 と 1 で表す. そのときの灯りの状態で消えているときを 0, ついているときを 1 とする. スイッチＡとスイッチＢ, 灯りは 2 つの状態しかないので, これは明らかに 2 進数の世界である.

スイッチＡ, Ｂと灯りの関係を表 1 にまとめた. このような表を真理値表という. スイッチＡ, スイッチＢはそれぞれ 2 通りあるので, 全体の組合せは 2×2＝4 通りである.

	(1)	(2)	(3)	(4)
A	0	1	1	0
B	0	0	1	1
灯り	1	0	1	0

表 1. 真理値表（2 箇所スイッチ）

また, これをベン図で表現すると図 2 のようになる. 灯りが 1 のときを斜線の領域で示した. ベン図はオイラー図とよばれることがある. このベン図で表された領域はスイッチＡとＢがともに 0, ＡとＢがともに 1 のときで, そのとき灯りがつくのである. 真理値表では(1)と(3)のときである.

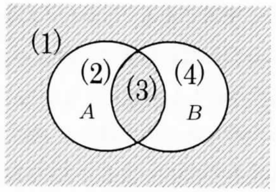


図 2. ベン図（2 箇所スイッチ）

これを論理式で書くとつぎのようになる.

灯り＝$\mathrm{AB}+\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}$

ABはＡとＢの積を, ＋は和を, $\bar{\mathrm{A}}$はＡの否定を, $\bar{\mathrm{B}}$はＢの否定を意味する. また, このような回路は一致回路とよばれている. 一致回路はつぎに示すように排他的論理和（Exclusive OR, XOR）の否定でもある.

コンピュータは 2 進数を原理としてできている. また, 電子回路は次の 6 つの基本回路で成り立っている. 論理積（ＡＮＤ）, 論理和（ＯＲ）, 否定（ＮＯＴ）, 否定論理積（ＮＡＮＤ）, 否定論理和（ＮＯＲ）, 排他的論理和（ＸＯＲ）がそれである.

四則演算(加減乗除)の基本は加算である. なぜなら掛け算は足し算の和として, 割り算は引き算の和として計算されるからだ. そして, 四則演算の基本である加算はつぎの 1 桁の演算ですべてが表現される.

0

$$
\begin{array}{r}
0\\
+1\\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0\\
+1\\
\hline
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\\
+0\\
\hline
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\\
+1\\
\hline
10
\end{array}
$$

この 1 桁の足し算を考えるとき, 計算結果を保存する場所として<和の位>と<桁上がりの位>の 2 つの場所が必要である. 和の計算は 0 と 0 は 0, 0 と 1 は 1, 1 と 0 は 1, 1 と 1 は 0 の 4 パターンが同時に満たされねばならないし, 桁上がりの計算は 0 と 0 は 0, 0 と 1 は 0, 1 と 0 は 0, 1 と 1 は 1 の 4 パターンが同時に満たされねばならない.

これを同時に満たすための加算回路は, <和の位>に排他的論理和（ＸＯＲ）の回路が, <桁上がりの位>には論理積（ＡＮＤ）の回路があれば十分である. ベン図を作成して各自, 確かめること.

さて, 排他的論理和と階段のスイッチである一致回路とは否定の関係であるといったが, ここでは論理式で確かめておこう. ＡとＢの排他的論理和は $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}$ のように表記される. 排他的論理和 $\mathrm{A}\oplus\mathrm{B}=\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}+\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ は一致回路 $\mathrm{AB}+\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}$ の否定であることは, ド・モルガンの法則より式で証明することもできるし, ベン図からも明らかである.

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{AB}+\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}}}=(\bar{\mathrm{A}}+\bar{\mathrm{B}})(\bar{\bar{\mathrm{A}}}+\bar{\bar{\mathrm{B}}})\\
&=(\bar{\mathrm{A}}+\bar{\mathrm{B}})(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}+\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}+\bar{\mathrm{B}}\mathrm{A}+\bar{\mathrm{B}}\mathrm{B}\\
&=\mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}+\bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}
\end{aligned}
$$

2 進数による演算は集合の論理演算に置き換えられ, これらは上記のようなブール代数として確立している. ブール代数は今日のコンピュータの基礎をなしているし, これを確立したジョージ・ブール(1854 年)の貢献は大きい. ただし彼はコンピュータの出現を知らない. 数学は現実の 100 年先のことを行っているともいわれている. これは数学者のみが味わえるロマンというものだろうか.

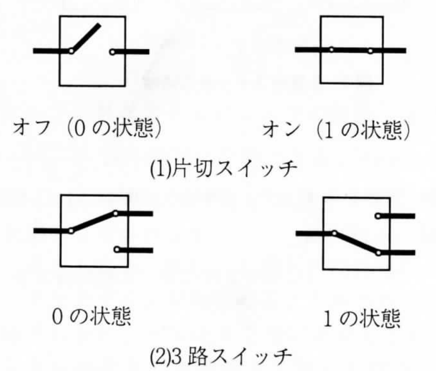


図 3. 片切スイッチと 3 路スイッチ

さて, 階段のスイッチの解答であるが, 普通のスイッチである片切スイッチでは駄目であることに気づいておられるだろう. 実際は 3 路スイッチというものが使われている（図 3）. そして, スイッチＡとＢが 0 と 0 のとき, 1 と 1 のときというように, 値が一致するときのみ灯りがつくのであるから, 1 階と 2 階の間には電線が 1 本ではなく 2 本引かれてあることになり, 最終的な回路図は図 4 の通りとなる.

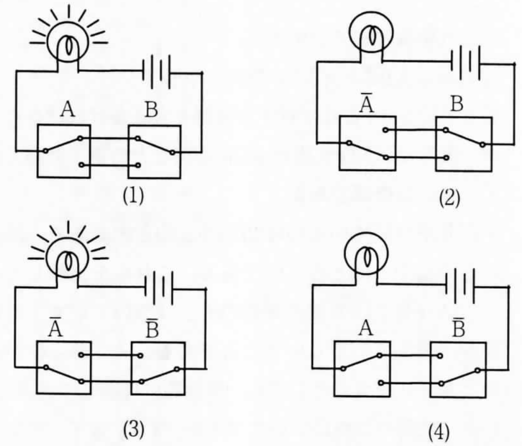


図 4. 2 箇所スイッチ（4 つの組合せ）

4. 無限箇所も可能に

問 4. 3 箇所で点滅できるスイッチの仕組みを考えよ.

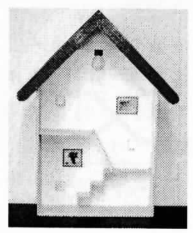


図 5. 階段のスイッチ（3 階）

1 階でも 2 階でも点滅できる階段のスイッチは非常に便利なものである. このような工夫は 2 箇所だけでなく, 3 箇所あるいは 5 箇所でも可能で, 実際にそのようなスイッチが実用化されている. ここでは, 3 箇所のスイッチについて考えてみよう. 図 5 は自作した 3 階建ての家にある階段のスイッチの模型である.

3 箇所のスイッチをＡ, Ｂ, Ｃとし, この 3 つのスイッチの関係が灯りの状態を決めるとする. スイッチの状態はそれぞれ 0 と 1 の状態があるから, 2×2×2＝8 通りの組合

せがある．それらの組合せに対して，灯りがついているときを1，消えているときを0として，真理値表を作成すると表2になる．

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
灯り	0	1	1	0	1	0	0	1

表2．真理値表（3箇所スイッチ）

これを論理式で示すと

灯り＝$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}$

のようになる．これに対する回路を考えなければならないが，実際はAND回路やXOR回路などの電子回路ではなく，単純な機構である．

灯りがついているのは(2)と(3)と(5)と(8)である．消えているのは(1)と(4)と(6)と(7)である．これらを比較してみると，A＋B＋Cの値が偶数の場合はついていて，奇数の場合は消えているということである．A＋B＋Cが奇数のとき灯りがつくとしても，機能的には同じである．

さて実際の回路についてである．まず，スイッチであるが，1階と3階のスイッチAとCは前に示した3路スイッチが使われている．2階のスイッチBは4路スイッチというのが使われている．4路スイッチの0は平行な状態，1はクロスの状態としておく．クロスの状態は機構的に難しいので実際は図6(2)のようになっている．

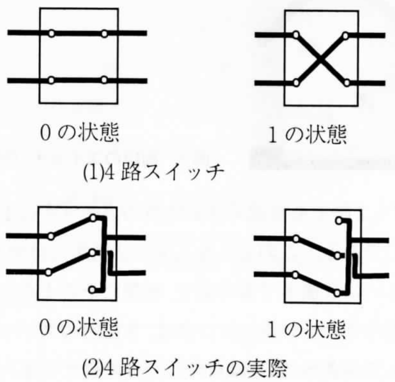


図6．4路スイッチ

3箇所スイッチがうまく作動しているかを図7にしたがい吟味しておこう．最初は灯りが消えているとする．スイッチA，B，Cは1，0，0の状態である(1)．つぎに，スイッチAでつける．スイッチA，B，Cは0，0，0の状態である(2)．つぎに，スイッチBで消す．スイッチA，B，Cは0，1，0の状態である(3)．つぎに，スイッチCでつける．スイッチA，B，Cは0，1，1の状態である(4)．そして，スイッチBで消す．スイッチA，B，Cは0，0，1の状態である(5)．

3箇所スイッチの考え方は無限箇所に適用される．左右両端は3路スイッチで，真ん中をすべて4路スイッチとすれば10箇所でも100箇所でも点滅できる回路を作ることができる．このような回路が考案されたのはコンピュータ技術の副産物でもある．

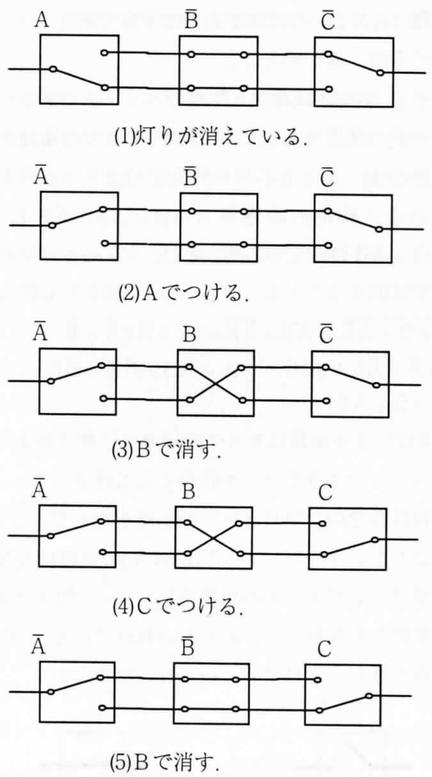


図7．3箇所スイッチの吟味

参考文献

(1) 西山豊「平等なスイッチ」『卵はなぜ卵形か』日本評論社，1986，pp.127-144

（にしやまゆたか／大阪経済大学）

正12角形編

内藤　康正

Question

図1の模様はあるひとつの図形を並べてできた模様です．その図形は何でしょう．

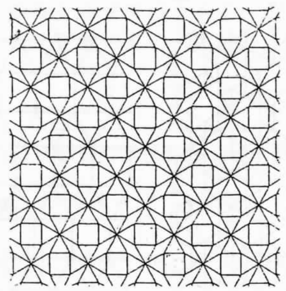


図1

タイトルから正12角形が正解であろうと予想がつくとは思いますが，もし，タイトルがなかったら想像できたでしょうか？

正12角形では，頂点をひとつ飛ばしに結べば正6角形，二つ飛ばしで正方形，3つ飛ばしで正3角形が得られます．またその内部は，図2のように一辺が1の30°150°の菱形，60°120°の菱形各6枚と正方形3枚のタイルでいろいろに分割することができます．

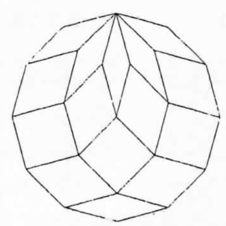


図2

ロシアの数学者チェビシェフの結果「正2n角形は$\frac{n(n-1)}{2}$個の菱形に分解できる」の$n=6$版ですが，タイルの種類も多すぎず単純すぎず自然な美しさを感じさせられます．

そのためか，試してみると正12角形ひとつでいろいろなデザインが得られることがわかります．数学的ではない，とお叱りを受けるかもしれませんが，あまりの生産的な活躍をご覧いただきたいと思います．念を押しますが，図3は全て正12角形だけでできているのです！

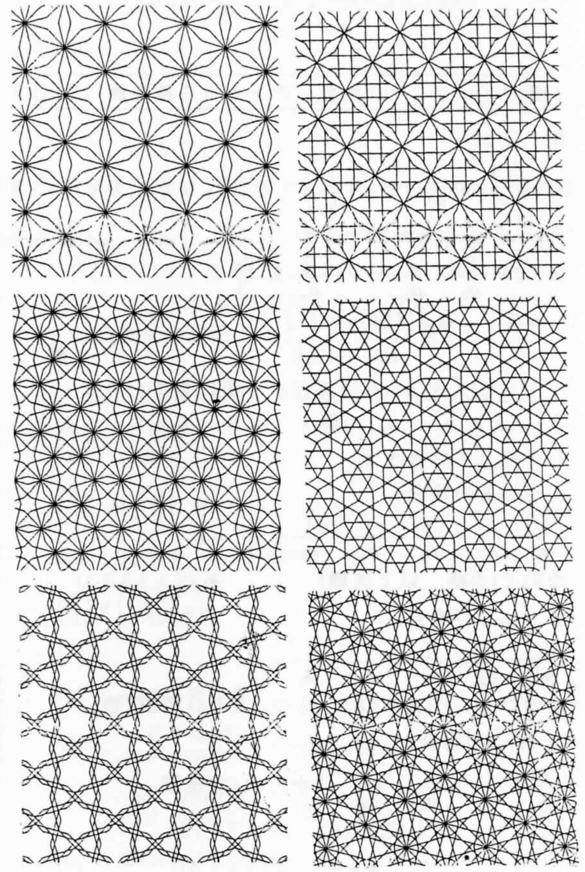


図3

次に，正12角形のタイルを用いて平面を埋め尽くすことを考えてみます．タイルを隙間なく並べた模様を美しいと感じるのは，古今東西を問わない自然な感情と思われます．正三角形，正方形，正六角形の3つは，それ一種類だけで平面をパックできます．後出の「あ」「き」「ち」がそれです．そこで2種類以上の正多角形を用いるとどうなるかというわけです．すると正12角形までが登場できるのです．タイルを並べる条件を

各頂点の周囲の正多角形の並び方は一定・・・#

としてスタートしてみましょう．

まず，各頂点に集まっている正多角形の個数をn個とします．そして，その正多角形を

正a_1角形，正a_2角形，・・・正a_n角形

とします．このとき，正a_k角形のひとつの内角の大きさは，

$$\frac{180(a_k-2)}{a_k}=180\left(1-\frac{2}{a_k}\right)\text{度}$$

なので，ひとつの頂点に集まる内角の和が360度で