$$ {}^tVPV = D \text{（}D\text{ は対角行列）},\ {}^tVQV = E $$

とできる．よって，

$$ P = ({}^tV)^{-1}DV^{-1},\quad Q = ({}^tV)^{-1}V^{-1} $$

となる．$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とおくと，

$$ \begin{aligned} &(x\ \ y)(P-Q)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^tX(P-Q)X \\ &= {}^tX\{({}^tV)^{-1}DV^{-1} - ({}^tV)^{-1}V^{-1}\}X \\ &= {}^tX({}^tV)^{-1}(D-E)V^{-1}X \end{aligned} $$

および，

$$ \begin{aligned} &(x\ \ y)(Q^{-1}-P^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= {}^tX(Q^{-1}-P^{-1}X) \\ &= {}^tX(Q^{-1}-P^{-1})X \\ &= {}^tX(V\,{}^tV - VD^{-1}\,{}^tV)X \end{aligned} $$

となるから，$Y = V^{-1}X$，$Z = {}^tVX$ とおくと，${}^tY(D-E)Y \geqq 0$ のとき ${}^tZ(E-D^{-1})Z \geqq 0$ を示すことになる．$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$Z = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$とおくと，$x, y$が任意の実数値をとるとき，$x_1, y_1, x_2, y_2$も任意の実数値をとれるから，

$$ \begin{aligned} &{}^tY(D-E)Y \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x_1\ \ y_1)\begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 \\ 0 & \beta-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha-1)x_1^2 + (\beta-1)y_1^2 \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1 \qquad \cdots\cdots② \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} &{}^tZ(E-D^{-1})Z \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow (x_2\ \ y_2)\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)x_2^2 + \left(1-\frac{1}{\beta}\right)y_2^2 \geqq 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 \geqq \frac{1}{\alpha},\ 1 \geqq \frac{1}{\beta} \qquad \cdots\cdots③ \end{aligned} $$

となる．したがって，②が成り立つとき③が成り立つことを示せばよいが，これは自明である．

4. 直和分解

行列Aが異なる固有値α, βをもつとき，

$$ \alpha U + \beta V = A \qquad \cdots\cdots① $$
$$ U + V = E \qquad \cdots\cdots② $$
$$ UV = VU = O \qquad \cdots\cdots③ $$

を満たすU, Vが存在する．これを**直和分解**という．

実際，①，②をU, Vについて解くと，

$$ U = \frac{1}{\alpha-\beta}(A-\beta E) \qquad \cdots\cdots④ $$

$$ V = \frac{1}{\beta-\alpha}(A-\alpha E) \qquad \cdots\cdots⑤ $$

となり，

$$ A^2 - (\alpha+\beta)A + \alpha\beta E = O $$

を利用すると，④，⑤は③を満たす．

このとき，

$$ U^2 = U,\ V^2 = V \qquad \cdots\cdots⑥ $$

が成り立つ．これは②と③から簡単に示せる．

例題 3.　$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$とするとき，
$X^3 = A$（Xの成分は実数）を解け．

Aを直和分解して考える．その結果，Xも同じ行列を用いて直和分解できることが分かる．

解　Aの固有方程式$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$を解くと$\lambda = 2, 1$となるから，$A$の固有値は2と1である．

よって，

$$ 2U + V = A,\ U + V = E,\ UV = VU = O $$

を満たすようにU, Vを定めると，$U = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$，$V = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$となる．

一方，ケーリー・ハミルトンの定理を使ってX^3の次数を下げると$X^3 = pX + qE$の形になるから，$X^3 = A$に代入して，

$$ \begin{aligned} &pX + qE = A \\ &pX + q(U+V) = 2U + V \\ &\therefore\ pX = (2-q)U + (1-q)V \end{aligned} $$

ここで$p = 0$とすると$A = qE$となり矛盾するから$p \fallingdotseq 0$である．よって，$X = sU + tV$の形になる．

$X^3 = A$より，

$$ \begin{aligned} &(sU + tV)^3 = 2U + V \\ &\therefore\ s^3U + t^3V = 2U + V \end{aligned} $$

UとVは互いに実数倍の関係ではないから，係数を比較して，$s^3 = 2$，$t^3 = 1$，すなわち$s = \sqrt[3]{2}$，$t = 1$となる．したがって，

$$ X = \sqrt[3]{2}\,U + V = \begin{pmatrix} 3\sqrt[3]{2}-2 & -3\sqrt[3]{2}+3 \\ 2\sqrt[3]{2}-2 & -2\sqrt[3]{2}+3 \end{pmatrix} $$

（みのわ ひろし）

数学を楽しむ

意外性のある確率

西山　豊

1. 誕生日が同じ確率

確率の問題はいろいろあるが予想と現実が大きくくいちがうと，確率の勉強はますます面白くなる．予想と現実がくいちがう確率のことを私は「意外性のある確率」と呼んでいる．今回はそのような確率の問題を2つ紹介したい．

クラスの中に誕生日が同じものがいる確率はどの程度であろうか．1クラスは約40人とする．1年は365日として，誕生日が同じ人がいるかいないかを学生に予測させてみる．ほとんどの学生は「いない」の方に予測する．その理由は，1年は365日でクラスの人数は40人だから誕生日が重なる確率は$\dfrac{40}{365}$であり，クラスの人数が366人になったとき始めて誕生日が同じものがいることになると考えるのである．

確率は実際に実験をしてみないと理解が深まらない．私は「情報数学」の講義で文系の学生を相手に毎年この例題をとりあげている．学生に自分の誕生日を言わせて，ひととおり済んだあと，誕生日が同じだった人は手をあげなさい，というと必ずといっていいほど手を上げるのだ．確率が$\dfrac{40}{365}$程度と予測しただけに大きく外れたので学生は不思議に思う．そこで私は，数式による確率の説明を行う．

これは余事象の考え方で解ける問題だ．クラスの人数をn人とし，1年を365日とする．まず，n人すべての誕生日が異なる確率をもとめる．

1人目が選べる誕生日の確率は365日の中の365日であるから$\dfrac{365}{365}$，2人目が選べる誕生日の確率は365日の中から1日のぞいた364日であるから$\dfrac{364}{365}$，n人目が選べる誕生日の確率は$\dfrac{365-(n-1)}{365}$となるから，n人すべてが異なる確率は

$$ P_1 = \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365} $$

となる．すくなくとも誰かの誕生日が同じである確率は上の確率の余事象としてもとまり，

$$ P = 1 - P_1 = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{365-1}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365} $$

となる．そして，$n = 23$のとき$P = 0.507$となる．つまり，クラスの人数が23人以上であれば，誕生日が同じものがいる確率が半分を超えるのである．23人といえば365日に対して1割もない数である．

余事象の考え方は非常に有効で，誕生日がすべて異なるの「すべて」と，すくなくとも誰かの誕生日が同じの「すくなくとも」の関係は英語では，all と at least の関係ではなかっただろうか．余事象を使った問題は受験でよく出てくるので慣れておくことが大事であろう．

このような意外性のある確率の問題が知られていなく，試験問題として出されることが少ない理由はP_1またはPを筆算で計算することが難しいためであろう．面白い例題でありながら試験問題に向かないという理由だけで忘れ去られている問題である．

現在ではパソコンが普及しているので表計算ソフトを使えば計算は容易である．誕生日が同じものがいる確率Pの値をクラスの人数nを変化させながらグラフ化すると確率の理解がさらに深まるであろう．nが小さいときは（$n<10$），Pは小さいが（$P<0.1$），それ以降は急激に増加し，$n=23$で$P=0.507$となり，$n>40$で$P>0.9$となる．

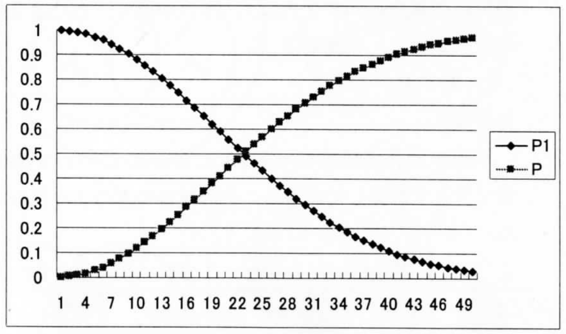


図1．すくなくとも1組の誕生日が同じ確率

この誕生日の例題は，授業で実験してもほぼ間違いな

く実現できる例題であるので，自信をもって紹介することができる．

2. 2組以上が同じ確率？

私は毎年，誕生日の例題を講義している．ところが今年，60人のクラスで実験してみたところ3組もの誕生日が同じであるという結果になったのだ．すくなくとも1組さえあれば確率の授業では十分であるが，3組も誕生日が同じであったのだ．

そこで，クラス60人に対して誕生日が同じなのが3組というのは，確率の妥当な値であるのかという新しい疑問がめぐらすのであった．

過去2年間クラスで実験したところ，そのときは受講生が40人くらいであったが誕生日が同じというのは1組であった．ところが今年は60人で誕生日が同じは3組もあった．さらに，3組のうち1組は，隣り合わせにすわっているもの同士の誕生日が同じであったのだ．

果たしてこれは妥当な数値なのだろうか？

シュミレーションするのに乱数を用いると便利である．Visual BASIC 言語で確認できる．乱数を生成する組込み関数 RND を用いて約50行でプログラムは可能である．私は，60人の実験では2組以上の誕生日が同じである確率が高い，という数値計算での予測ができたので数式で押えておくこととした．

1組だけ誕生日が同じである組合せは次のように考える．n 人の中から2人を選ぶ組合せは，

$${}_nC_2=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}\text{ 通り}$$

である．それぞれにおいて，残り $(n-2)$ 人の誕生日が異なるから，確率は次のようになる．

$$P_2={}_nC_2\times\frac{365}{365}\times\frac{365-1}{365}\times\cdots\times\frac{365-(n-2)}{365}$$

誕生日が重なる人が2人以上（3人が同じ，または2組の2人が同じ）の確率は

$$1-P_1-P_2$$

となる．

以上の計算式の元に $n=23$ と $n=60$ について表計算ソフトで計算してみると，その値はつぎのようになった．

n	P_1	$1-P_1$	P_2	$1-P_1-P_2$
23	0.493	0.507	0.363	0.144
60	0.006	0.994	0.034	0.960

表1. 誕生日が重なる確率　($n=23,\ 60$)

また，確率 P_2 を表計算ソフトで計算するとき，分母と分子をつぎのように分けて計算させると計算過程でオーバーフローを起こしてしまう．

$$\text{分子}=365\times{}_nC_2\times(365-1)\times\cdots\times(365-(n-2))$$

$$\text{分母}=365\times365\times365\times\cdots\times365=365^{n-1}$$

P_2 の計算がオーバーフローしない工夫は，計算の順序を各項ごとに計算することである．

これでいくと，60人のクラスでは3組が同じどころか，4組もまったくでたらめでないことが分かる．

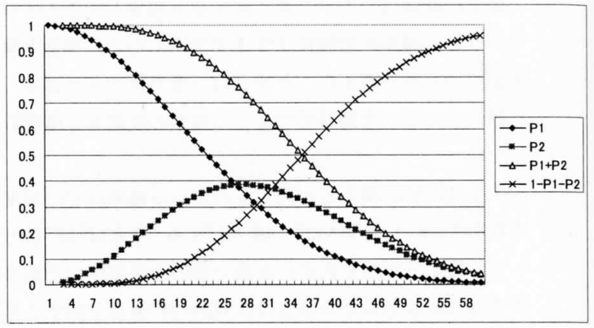


図2. 2組以上の誕生日が同じ確率

3. 元の席と同じ確率

もうひとつ意外性のある確率を紹介しよう．それは席替えの確率である．クラスの席替えをする場合，元の席と同じであったという生徒がいる確率はどの程度であろうか．皆さんの中に席替えをしても違う席にならなかったという不幸な経験を持っている人はいないだろうか．自分でなくても変わらなかった友達がいたのを知っているだろうか．ここでは，このようなことは決して不幸でもなく，高い確率で起こりうることを説明しよう．

席替えの問題はクリスマス・プレゼントの問題としても同じである．自分の持ってきたプレゼントを引いてしまうバツの悪さ，行いが悪かったのかと悲観すべきなのだろうか．そうではない，そういう確率が意外と大きいのである．

数式で表す前に数え上げの方法で試してみよう．生徒を1，2，・・・のように番号で示し，席替え前と席替え後を比較して，席が元と同じであった場合を丸印で示した．

生徒が2人の場合は席が2つあるから並べ方は $2!=2$ 通りあり，表2のように席替え後の1行目は1と2がともに変わらず，席が変わらないケースは1通りとなり，確率は0.5となる．

席替え前	1	2
席替え後	①	②
	2	1

表2. $n=2$ の場合

同様にして，生徒が3人の場合を表3に示した．生徒の並べ方は $3!=6$ 通りあり，席が元と同じである場合を丸印で示すと，席替え後の1行目は1，2，3の3人が同じであり，2行目は1だけが同じであり，3行目は3だけが同じであり，6行目は2だけが同じとなる．そして席が変わらないケースは4通りとなるから，確率は

$$P=\frac{4}{3!}=\frac{4}{6}=0.666\cdots$$

となる．

席替え前	1	2	3
席替え後	①	②	③
	①	3	2
	2	1	③
	2	3	1
	3	1	2
	3	②	1

表3. $n=3$ の場合

問1　$n=4$ のとき，少なくとも1人の席が変わらない確率を数え上げによる方法で求めよ．

席替え後の並べ方は $4!=24$ 通りあり，席が変わらないケースは15通りあるので確率は

$$P=\frac{15}{4!}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}=0.625$$

となる．

このように数え上げの方法は確実であるが数式でおさえることも大切である．生徒が n 人の場合，少なくとも1人が変わらない確率は

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$$

となることが知られている．この式の導入を考えてみよう．

生徒1が変わらない場合は，残りの $(n-1)$ 人の並べ方は $(n-1)!$ 通りあり，これが n 人に対して同様に成り立つから全部で

$$n\times(n-1)!=n!\text{ 通り}$$

となる．この場合残りの生徒が変わらないこともあるが，このことは後述する．

生徒1と生徒2が変わらない場合は，残りの $(n-2)$ 人の並べ方は $(n-2)!$ 通りあり，生徒2人の選び方は ${}_nC_2$ 通りあるから全部で

$${}_nC_2\times(n-2)!=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}\times(n-2)!=\frac{n!}{2!}\text{ 通り}$$

となる．

同様にして生徒1と生徒2と生徒3が変わらないというような生徒3人が変わらない場合は

$${}_nC_3\times(n-3)!=\frac{n!}{3!}\text{ 通り}$$

となる．

以上の関係はやや難しいので，$n=3$ についてベン図を用いて説明しよう（図3）．

生徒1が変わらない事象を A_1，生徒2が変わらない事象を A_2，生徒3が変わらない事象を A_3 とする．すると少なくとも1人の生徒が変わらない事象 A はつぎのようになる．

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3$$
$$=(A_1+A_2+A_3)-(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1)+A_1A_2A_3$$

事象 A_1 には純粋に生徒1だけが変わらない場合と，生徒1と生徒2が変わる場合と，生徒1と生徒3が変わる場合と，生徒1と生徒2と生徒3が変わる場合の4つのケースがある．これらの重複した部分を消去したのが先の式である．$(A_1+A_2+A_3)$ は単純に3つの事象を足し合わせたものである．これでは足しすぎで重複した部分を引いたのが $-(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1)$ である．しかし，これでは引きすぎとなるので，また $A_1A_2A_3$ を足しているのである．

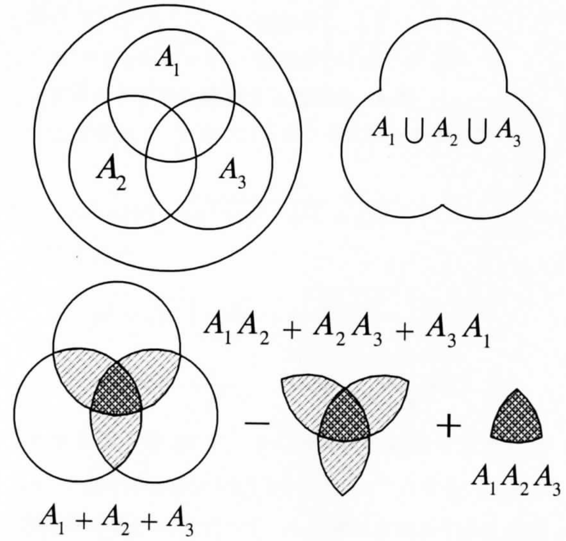


図3. ベン図による説明（$n=3$）

表3で示した$n=3$の場合の$3!=6$通りとの関係で見ておこう．

$A_1+A_2+A_3$は，席替え後の1行目と2行目，1行目と6行目，1行目と3行目の合計6通りである．$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$は，1行目が3通りで合計3通りである．$A_1A_2A_3$は，1行目の1通りである．よって

$$A_1\cup A_2\cup A_3=6-3+1=4 \text{ 通り}$$

となる．また，席替えで変わる場合は，4行目と5行目の2通りとなる．

$$1-A_1\cup A_2\cup A_3=2 \text{ 通り}$$

変わるのが4通りで変わらないのが2通りで，合計6通りとなることが確認できる．

4. モンモルの定理

このようにして一般のnに対して，符号を交互に変えて加えることによって事象Aを求めることができる．したがって少なくとも1人が変わらない場合は

$$n!-\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}-\frac{n!}{4!}+\cdots\pm 1 \quad \text{通り}$$

あり，全体の並べ方は$n!$通りであるから，確率Pは

$$P=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}$$

となる．

生徒の数nと確率Pの表をつぎに示しておく（表4）．

n	P
1	1
2	0.5
3	0.6667
4	0.625
5	0.6333
6	0.6320
7	0.6321

表4．生徒数nと確率P

この式の値はnが大きくなるにつれて

$$1-\frac{1}{e}\ (\approx 0.63212)$$

の値に近づくことが知られている．（eは自然対数で$e\approx 2.71828$である．）驚くべきはnの値にかかわらず，この確率は同程度であることである．そして，nが無限大でも0.6を超えるのである．100人のクラスで席替えしても，1000人でクリスマスのプレゼント交換をしても，同じ席であったり，自分が持ってきたものを引いてしまったりする確率が0.6を超えるのである．ただし，この数値は1に近づかないところが誕生日の確率とは異なる．

参考文献(1)によれば，この問題には数多くの変形があり，見事な解答がされているのはモンモル（P.R. Montmort, 1708年）にまでさかのぼるとある．n枚の異なるカードからなる同じ2組のものが，それぞれランダムな順序で並べられ，たがいに向き合って置かれている．その場合，カードが一致する確率はどの程度であろうか．

n個の手紙とn個の封筒がある．秘書がでたらめな入れ方をした場合，手紙と封筒が一致する確率はどの程度であろうか．

携帯品預かり所で帽子が混じりあって，でたらめに客に渡されることを想像してみる．あるひとが自分の帽子を受け取れば一致が生じたとする．この一致の確率はどの程度であろうか．8人の客がいる会合で帽子が一致する確率と，10000人の集まりにおける確率と比較してみると，意外なことにnに無関係で約$\frac{2}{3}$であることである．

席替えの確率はこのように多くの変形があり，ずいぶん昔から注目されてきているのである．

参考文献

(1) W.フェラー『確率論とその応用Ⅰ・上』紀伊國屋書店，1960, pp.127-132

（にしやまゆたか／大阪経済大学）

最新の

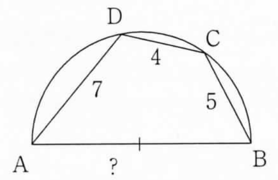
良問を楽しむ

複素数を楽しもう

名倉嘉尊

1. 実数のためにこそ複素数

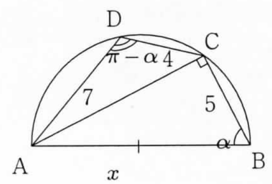
ABを直径とする半円の弧上に2点C, Dをとって，BC＝5，CD＝4，DA＝7となるようにするためには，直径ABの長さをいくらにすればよいか（図1. 1）．



（図1. 1）

という問題が与えられたとき，$AB=x$，$\angle ABC=\alpha$とすれば，$\angle BCA=90°$であることから，$x\cos\alpha=AB\cos\alpha=BC=5$となる．

しかしまた，四角形ABCDは同一の円に内接しているので，$\angle CDA=\pi-\angle ABC=\pi-\alpha$である（図1. 2）．したがって，△CDAに余弦定理を適用すれば次のようになる．



（図1. 2）

$$\begin{aligned}CA^2&=CD^2+DA^2-2CD\cdot DA\cos(\pi-\alpha)\\&=4^2+7^2+2\cdot4\cdot7\cos\alpha\\&=65+56\cos\alpha.\end{aligned}$$

このことと$\angle BCA=90°$であることから，

$$\begin{aligned}x^2&=AB^2=BC^2+CA^2\\&=5^2+65+56\cos\alpha=90+56\cos\alpha\\ \therefore\ x^3&=x\cdot x^2=x(90+56\cos\alpha)\\&=90x+56x\cos\alpha=90x+56\times5\end{aligned}$$

となるので，xは次の3次方程式を満たす．

$$x^3-90x-280=0 \quad \cdots\cdots ①$$

この方程式を解くためには

$$x^3-3px-2q=0 \quad \cdots\cdots ②$$

という形の，$-3p$，$-2q$を係数とする3次方程式の解法を知っておくと都合がよい．

②を解くために，カルダーノ（1501～1576）に従って，$x=u+v$とするとき，②から

$$\begin{aligned}0&=(u+v)^3-3p(u+v)-2q\\&=u^3+v^3-2q+3(u+v)(uv-p)\end{aligned}$$

となるので，

$$u^3+v^3=2q,\quad uv=p \quad \cdots\cdots ③$$

となるような数u, vを求めればよいことがわかる．

しかし，③のかわりに

$$u^3+v^3=2q,\quad u^3v^3=p^3 \quad \cdots\cdots ④$$

と書けば，2数u^3, v^3は2次方程式

$$t^2-2qt+p^3=0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

の解であることになり，特に①の場合は②との比較から$p=30$，$q=140$となるので

$$q^2-p^3=19600-27000=-7400<0$$

となる．したがって①のための②を考える限り，⑤の解は$x=q\pm i\sqrt{p^3-q^2}$（iは虚数単位）であり，このときは

$$u^3=q+i\sqrt{p^3-q^2},\quad v^3=q-i\sqrt{p^3-q^2} \quad ⑥$$

とすることができる．

この場合，

$$|u^3|=|v^3|=\sqrt{q^2+(p^3-q^2)}=\sqrt{p^3}$$

となるので

$$u^3=\sqrt{p^3}\left(\frac{q}{\sqrt{p^3}}+i\sqrt{\frac{p^3-q^2}{p^3}}\right),$$

$$\cos3\theta=\frac{q}{\sqrt{p^3}},\quad \sin3\theta=\sqrt{\frac{p^3-q^2}{p^3}}$$

となるような3θを，$0<3\theta<\pi$の範囲で求めれば$u^3=\sqrt{p^3}(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\sqrt{p^3}e^{3\theta i}$となる（$e$は自然対数の底）．したがって，$u$の値は次のように3個存