数学を楽しむ

サイコロの目の和が同じ

西山　豊

1. ある確率問題

2004年夏にデンマークで開かれた数学教育の世界会議（ICME10）で知り合ったイギリスのS．ハンブルからちょっと面白いメールが送られてきた．それは2つのサイコロを使って目の和を求める確率の問題だ．サイコロの目の和は2から12まで分布するが，これと同じ確率分布を持つサイコロがあるとしたなら，それは

1, 3, 4, 5, 6, 8 と 1, 2, 2, 3, 3, 4

の組み合わせがある．そして，これがユニークな解であることを証明せよというのである．

サイコロを使った確率の問題は受験ではよく出てくる．たとえば，2つのサイコロを振って目の和が偶数であるときの確率は，目の和が3の倍数となる確率は，目の和が5以上となる確率は，など．これらはサイコロの目が1から6まで順番に数字のついた普通のサイコロを前提としている．知人から送られてきたメールを見て，こういう問題もあるのかと思って目の和について確認計算をしてみた．

サイコロは立方体であるから6面で構成されている．普通のサイコロを2つ取って目の和の度数分布を書き上げてみると図1のようになる．サイコロ1の目の出方は6通り，サイコロ2の目の出方も6通りあるので，合計36通りの組み合わせがある．目の和が2は1回，目の和が3は2回，……，目の和が7は6回，……目の和が12は1回というように，目の和が7のときが最大で度数分布図は直線的に増減する三角形の形をしている．

メールで送られてきた数値データ1, 3, 4, 5, 6, 8と1, 2, 2, 3, 3, 4をサイコロ1とサイコロ2の数字に変え，2つのサイコロの目の和を表計算ソフトでもとめ，度数分布を確認してみた．するとどうだろう．目の和は2から12まであり，度数分布はなんと図1で示した普通のサイコロと同じ分布をするのであった（図2）．

私はこのことにまず感心するとともに，これは偶然そうなったのだろうか，度数分布が同じであるサイコロの組み合わせが他にもあるのかと考えてみた．普通のサイコロは目の和が2は度数が1回であるから，サイコロの最小の値は互いに1でなければならないことはすぐわかる．数字が未決定のところを変数 x で表記すればつぎのようになる．

サイコロ2

サイコロ1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

図1．普通のサイコロ

サイコロ2

サイコロ1	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

図2．確率分布が同じサイコロ

$1, x, x, x, x, x$ と $1, x, x, x, x, x$

また目の和の最大12も度数が1回であるから，最後の数字は足して12とならねばならない．そこで仕上がりは，つぎのようになる．

$1, x, x, x, x, 10$ と $1, x, x, x, x, 2$

$1, x, x, x, x, 9$ と $1, x, x, x, x, 3$

$1, x, x, x, x, 8$ と $1, x, x, x, x, 4$

$1, x, x, x, x, 7$ と $1, x, x, x, x, 5$

そして残りの x の数字をコツコツと根気よく調べていけばよいことになる．真ん中にある4つの x にくる数字であるが，左端の小さいほうは1を含んではだめで2以上であり，右端の大きいほうは最大数を含んでは駄目でそれ未満である．このようにでたらめに数字をあてはめるのではなく，条件を考え，条件にあった数字だけを選んでいくとこの問題も苦痛ではなくなり，紙と鉛筆さえあれば解を求めることができる．

さて，上に示した4ケースのうち最初の2ケースは不可能であることはちょっと調べればすぐわかる．4ケース目の $1, x, x, x, x, 7$ と $1, x, x, x, x, 5$ はいいところまでいくのだが，もうひとつのところで完成しない．たとえば，1, 2, 4, 4, 6, 7と1, 2, 3, 3, 4, 5とした場合は目の和が5, 6, 8, 9の度数が1つだけ合わない．3ケース目の $1, x, x, x, x, 8$ と $1, x, x, x, x, 4$ の中に解が存在するわけであるが，紙と鉛筆で自分で求めることができた．正解である1, 3, 4, 5, 6, 8と1, 2, 2, 3, 3, 4の数字の組み合わせを眺めてみると，それぞれの平均が4.5と2.5である．また平均の和が7となる．また数字の配置は左右対称で山形となっている．普通のサイコロは平均が3.5で平均の和が7である．平均の合計が等しいこと，数字がバランスよく配置されていること，このあたりに確率分布が同じになる必要条件があるのだろうか．

このようにエレガントな解答とはいえないまでも度数分布が同じであるサイコロを自分で見つけることができた．しかし，紙と鉛筆による試行錯誤であるので見落としということがあるかも知れない．また，私の考えた証明方法は数学的とは言いがたい．確率分布が同じサイコロが1つ存在するのは偶然なのか，それとも必然なのか．いろいろと疑問が残ったまま，この調査の第一ラウンドは終わる．

2. 8面体サイコロなら3つの解

海外ではプログラムを作ることはないだろうと思ってパソコンのソフトを持ってこなかった．しかし，今回のチェックはソフトが必要である．手計算では見落としの可能性が大きいからだ．インターネットのオークションで安く入手したVisual Basicのソフトをインストールし，簡単なプログラムを作成してチェックしてみた．何も考えずにプログラムを組めば演算時間がかかって結果がでなくなる．たとえば，1つのサイコロに6個の数字を決めるから6つのループ，サイコロは2つあるから2つのループが必要であるから，合計12個のループとなる．そして数字は1から6までの出方があるから6通りの検査が必要である．これらの数値をすべて調べつくしてもよいが，あまりいい方法ではない．

プログラムを作成する前に，紙と鉛筆で答えを求めたことがプログラムを効率よく作成するための予備調査となっていた．サイコロの6個の数字を決めるが，最初の数字1と最後の数字Maxは固定で，その間の4個の数字だけを検討すればよい．また左から右に並ぶ数字は昇順になっているからすべての数字を調べる必要がない．このような点に注意すればプログラムは効率よく解を求めることになる．

このようにして作成したプログラムを実行させると，サイコロの目の和の確率分布が同じなのは1, 3, 4, 5, 6, 8と1, 2, 2, 3, 3, 4の組み合わせだけである，という結果が出たのである．手計算による計算の間違い，取りこぼしがなかったのである．

プログラムの結果に満足した私は，興味が他のほうに移っていった．1, 3, 4, 5, 6, 8と1, 2, 2, 3, 3, 4が唯一の解であるのは偶然なのだろうか．サイコロは正6面体である．正多面体はこれ以外に正4面体，正8面体，正12面体，正20面体がある．これらの正多面体をサイコロと考えた場合，同じような確率問題を設定することができるのではないか．そこで面の数が2つ多い正8面体を考えた．正8面体の場合，サイコロの数字は

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

となるから，目の和は2から16まで分布し，目の和の9が最大で度数は8回である．この確率分布と同じ確率分布を持つ正8面体の組み合わせがあるだろうか，ないだろうか．1つではなく複数の解が見つかるだろうか．私は予想してみた．正6面体の場合は1ケースの解がある．サイコロの数の組み合わせは面の数の積に比例するのであるから，正8面体の場合は正6面体より多く，複数のケースが見つかるのではと思った．つまり $6 \times 6 = 36$ の範囲ではなく $8 \times 8 = 64$ の範囲で探すのだから解が見つかる可能性が大きくなるのではないだろうか．

プログラムは正6面体のチェックに使ったプログラムを少し改良するだけで済んだ．調べる面の数を6から8に増やすだけで簡単に変更できた．実行してみると私の予想はあたった．正8面体の場合はつぎの3つの解がみつかった．

1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9　と　1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7

1, 2, 5, 5, 6, 6, 9, 10　と　1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6

1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 11　と　1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

である．読者にはこの数字の組み合わせが普通のサイコロと確率分布が同じであることを確認してほしい．正6面体の場合は解が1つであったが，正8面体の場合は解が3つである．やはり解の可能性が面の数の積に比例しているようにも思える．

正多面体には正12面体や正20面体もある．そこで私は正12面体について調べようとした．しかし，私のプログラムでは調べる面の数を8から12に増やさねばならなく，それに関連して演算時間が膨大になる．この方法では結果を求めるのが不可能であることがわかり断念した．後でわかったことだが，他の方法では正12面体の場合は7ケースの解があるこ

とがわかっている．正20面体ならもっと増えることは十分に予想できる．以上をまとめると正6面体は1ケース，正8面体は3ケース，正12面体は7ケースの解が存在し，面の数を横軸にとり解の数を縦軸にとってプロットしてみると，直線ではなく2次または3次曲線の形をしている．

面の数が多い正多面体をあきらめて，面の少ない正4面体について調べてみた．意外なことに正4面体にも解が1つ見つかった．それは

1, 3, 3, 5 と 1, 2, 2, 3

の組み合わせである．正4面体にも確率分布が同じものが存在するのか，と私は感心しながらVisual Basicのプログラムによるチェックの方法に一定の成果があり満足であった．プログラムによるチェックは手計算で行った場合の取りこぼしがなく，点検には都合がよい．しかし，他力本願といおうか自分で解いたという気がしなく何かすっきりしない気持ちが残った．

3. 多項式による証明

私はプログラムの結果を整理し，サイコロを正8面体としたときに，確率分布が同じとなるものに3つの組合せがあることをS.ハンブルにメールで知らせた．このことを彼は知らなかったらしい．そして私のメールの返事として次のことを教えてくれた．証明法について，マーチン・ガードナーの古い著作の中にこの確率問題があり，生成関数というのがあって，それは

$$P(x)=\frac{1}{6}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) \qquad (1)$$

という形をしていて，これを使えば証明ができるというのだ．

マーチン・ガードナーといえば1970年代に活躍し読者も多く影響力が大きい数学随筆家である．年配の方にはこの問題の結末を知っている方がおられるかもしれない．私は，確率が苦手なので確率問題を意識的に避けてきたが，今回の問題はなぜか面白く取り組むことができた．後述するが証明法は1970年代に確立されてから現在に至るまで30年を経過することになり，表現方法は多少の違いがあるが多項式を使ったもので大筋は同じである．以下，証明の概略を説明していこう．

式(1)をどう読むかであるがxに値を代入して式の値を求めるという種類のものではない．証明に多項式の次数と係数が使われているということである．だから次数と係数に注目することに慣れていただきたい．項の数は全部で6個あるが，一般項ax^kはサイコロの目の和がkとなるのはa個ある，と読む．次数は目の和に，係数は度数に対応している．具体的に見ていこう．サイコロが1つの場合は目が1は度数が1回，目が2は1回，…目が6は1回である．だから，$1x^1$, $1x^2$, …, $1x^6$ つまり x, x^2, …, x^6 となる．そして，それぞれが同じ確率でおこり，確率は全体を足して1でなければならないから6で割ってある．

サイコロが2つの場合は式(1)の左辺，右辺を自乗することに対応する．そして多項式を展開したときの次数と係数が目の和と度数を示していることになる．以上のことを数式で確認してみるが，式を見やすくするため式(1)の両辺を6倍して分母を取り払っておく．

$$6P(x)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 \qquad (1)'$$

$$\{6P(x)\}^2=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12} \qquad (2)$$

式(2)の右辺に注目すると，展開された多項式の各項の次数と係数がサイコロの目の和と度数の関係，確率分布をうまく表しているのがわかる．たとえば$5x^6$はサイコロの目の和が6となるのは5回である，$4x^9$は目の和が9となるのは4回であると読む．問題を解くために必要なのは式(2)の右辺を因数分解できるとしたら，どのような形になるかである．因数分解の形が式(1)の多項式になるなら，それは普通のサイコロとなるであろう．そうではなく，別の多項式の積として因数分解できたなら，それが解となるのである．こんなことができるのだろうか．

そこで式(1)'に戻ってつぎのように式を変形してみよう．各項にxの因数があるから，まずxで各項をくくると$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$の項が残る．よく知られているように$\sum_{i=0}^{k-1} x^i$は$(x-1)$を掛けると(x^k-1)の形になるので，これを応用する．分子に$(x-1)$を掛け，分母にも$(x-1)$を掛けておくと式の値は変化しないことになる．一般に(x^k-1)の形は因数分解がしやすく，その結果，多くの因数ができる．たとえば(x^6-1)は$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$となる．

以上をまとめて書いてみるとつぎのようになる．

$$\begin{aligned}6P(x)&=x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\&=x(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)/(x-1)\\&=x(x^6-1)/(x-1)\\&=x(x^3-1)(x^3+1)/(x-1)\\&=x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)/(x-1)\\&=x(x^2+x+1)(x+1)/(x^2-x+1) \qquad (3)\end{aligned}$$

式(3)が示すように，$P(x)$は4つの項の積として因数分解できたことになる．式(1)からは想像がつかない形である．式(3)の左辺と右辺を単純に自乗すると次のようになる．

$$\{6P(x)\}^2=x^2(x^2+x+1)^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2 \qquad (4)$$

問題を解くために式(4)の右辺を2つに分解するわけだが，でたらめに振り分けてはいけない．自乗したから項の数は全部で8個あることになる．2つに振り分けるには条件があるのでそれを検討する．式(3)に戻って各項を検討すると，まずxはサイコロでは1の目に対応するので，これはどちらにも入れておかねばならない．残る3項について$x=1$のときの値を計算してみると，

$(x^2+x+1)=3$

$(x+1)=2$

$(x^2-x+1)=1$

となる．左辺の$P(x)$には6が掛けてあるから，右辺には6の因数がこなければバランスがとれない．そのためには(x^2+x+1)の3と，$(x+1)$の2の項が必ず1個ずつ含まれねばならない．$3\times2=6$で6の数字がバランスがとれクリアできる．一方，(x^2-x+1)は値が1であるから，どちらに含まれようが関係ない．$(x^2-x+1)^2$をどのように振り分けるかであるが，双方のサイコロに1項ずつ含まれるなら，それは普通のサイコロと同じになるであろう．片方だけに含まれるなら，それは別のサイコロとなり，求めようとする解になる．

以上の検討結果を式(5)で表しておく．左辺は普通のサイコロ$P(x)$が2個を意味し，右辺は別のサイコロ$Q(x)$と$R(x)$の組み合わせを意味している．それぞれの多項式の積を展開すると式(2)で示した右辺と同じになる．つまりサイコロの目の和の確率分布が同じになるのである．

$$\begin{aligned}\{6P(x)\}^2&=\{6Q(x)\}\{6R(x)\}\\&=\{x(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)^2\}\\&\quad\{x(x^2+x+1)(x+1)\}\\&=(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x)\\&\quad(x^4+2x^3+2x^2+x) \qquad (5)\end{aligned}$$

ここで解の多項式は

$$Q(x)=\frac{1}{6}(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x) \qquad (6)$$

$$R(x)=\frac{1}{6}(x^4+2x^3+2x^2+x) \qquad (7)$$

となる．多項式の各項の次数と係数はサイコロの目の和とその度数を示しているのであるから，サイコロQの目は8, 6, 5, 4, 3, 1の数字を持ち，サイコロRの目は4, 3, 3, 2, 2, 1の数字を持つことになる．

この数字は冒頭で示した正6面体の場合の唯一の解と一致するのである．以上が多項式の次数と係数を応用した証明法であるが，見事と言うしか表現の方法がない．ここでは正6面体の証明を説明したが，この方法は正4面体，正8面体，正12面体，正20面体の証明にも適用できる．Visual Basicのプログラムによる解の発見には演算速度の限界から正12面体以上は求めることができなかったが，この方法では可能である．正12面体の場合に解が7ケース見つかっているのも多項式による方法である．

4. ジッヒャーマン・ダイス

多項式による証明が理解できて一段落．このような面白い問題を誰が考え，またエレガントな解法を誰が思いついたのであろうか．私の興味はこの問題と解法のルーツ探しに移っていった．

いろいろ調べた結果，1970年代にまでさかのぼる事ができた．問題の発端は1978年2月号のサイエンティフィック・アメリカン誌の19ページに掲載されたM.ガードナーの記事のようである[1]．記事を読むと，この奇妙なサイコロを最初に発見したのはG.ジッヒャーマン（George Sicherman）であるという．彼が証明まで知っていたかは定かでない．ただ面白いサイコロがあるという事実を提示しただけであろう．そして，この雑誌の記事をみた読者から多くの証明に関する手紙がM.ガードナーに届いたが，エレガントな解法はJ.A.ガリアンやD.M.ブロラインに代表される多項式を用いるものであったとM.ガードナーはその後の著書で書いている．2つの論文は参考文献としてあげておく[2][3]．

現在このサイコロはクレイジー・ダイスまたは発見者の名前をとってジッヒャーマン・ダイスと呼ばれている．ジッヒャーマンはこのサイコロを商品として売り出しているが，実際のカジノでは使われていないらしい．サイコロの目の和が同じになるというのは数学者にとっては魅力的な話題であるが，現実は別だということだ．

（参考文献）

(1) Martin Gardner, Mathematical games, Scientific American, 238 (1978) 19－32

(2) Joseph A. GALLIAN and David J. RUSIN, Cyclotomic Polynomials and Nonstandard Dice, Discrete Mathematics, 27 (1979) 245－259

(3) Duane M. Broline, Renumbering of the Faces of Dice, Mathematics Magazine, 52 (1979) 312－315

（にしやまゆたか／大阪経済大学）