ぶことには抵抗があるかもしれないが，とりあえず，言葉の問題にすぎないと軽く考えておいてほしい．

4. 放物線

オイラーはさらに，$\gamma = 0$ の場合についても書いている（第 136 節 p.83）．

> γ の値の正負に応じて第二目の線（二次曲線）のまったく異質の性質が引き起こされて，正しく二つの異なる種が形成される．そこで正と負の中間の位置を占める値を取り上げて，$\gamma = 0$ と置くと，その場合に現れる曲線もまた，ある意味で双曲線と楕円の中間に位置する種を形成する．この種は放物線と呼ばれる．

オイラーは曲線

$$y^2 = \alpha + \beta x$$

を考察しているわけだが，暗黙のうちに $\beta \neq 0$ と仮定している．こういう仮定は外して考えよう．まず，

$$y^2 = rx, \quad r \neq 0$$

によって定義される曲線を放物線と呼んでおく．

問題 4　$\gamma = 0$ のとき，2 次曲線

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

つまり

$$y^2 = \alpha + \beta x \tag{13}$$

は放物線あるいは平行な 2 直線あるいは 1 直線あるいは空集合であることを示せ．

[解答]　β によって場合分けしよう．

1）$\beta \neq 0$ の場合：

$$x' = x + \alpha/\beta$$

と置くと，(13) は

$$y^2 = \beta x'$$

となり，放物線だとわかる．

2）$\beta = 0$ の場合，(13) は

$$y^2 = \alpha$$

となるので，$\alpha > 0$ なら平行な 2 直線

$$y = \sqrt{\alpha}, \quad y = -\sqrt{\alpha}$$

また，$\alpha = 0$ なら 1 直線

$$y = 0$$

さらに，$\alpha < 0$ なら空集合となることがわかる．□

5. 2 次曲線の分類

オイラーはいままでの議論を総括して，つぎのように書いている（第 137 節 p.83）．

> これで，われわれは第二目の線（二次曲線）の種を三つ手に入れた．すなわち，楕円と放物線，それに双曲線である．これらが相互に異なっている様子はめざましく，混同するのがまったく不可能なほどである．実際，本質的な差異は，無限遠に伸びていく分枝の本数において認められる．

無限遠にまで伸びる分枝の本数（さらには，漸近線の本数など）が曲線を分類するための基準になることを予兆させる発言だ．2 次曲線については，あれこれ論じなくても，楕円，放物線，双曲線の違いは明らかだが，オイラーには 3 次曲線や 4 次曲線についても同様の分類を試みようとという狙いがあり，その立場から 2 次曲線の分類基準についてコメントしているのである．それはともかく，いままでにわかったことを定理 1 として整理しておこう．

定理 1

2 次曲線

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$
$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

は回転と平行移動（と線対称移動）によって

$$y^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

の形の 2 次曲線に変換できる．この 2 次曲線の形状はつぎのようになる．

1）$\gamma > 0$ のとき
- $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$ なら双曲線
- $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ なら交わる 2 直線

2）$\gamma < 0$ のとき
- $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ なら楕円
- $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ なら 1 点
- $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ なら空集合

3）$\gamma = 0$ のとき
- $\beta \neq 0$ なら放物線
- $\beta = 0$ かつ $\alpha > 0$ なら平行な 2 直線
- $\beta = 0$ かつ $\alpha = 0$ なら 1 直線
- $\beta = 0$ かつ $\alpha < 0$ なら空集合

[証明]　命題 1，問題 2，問題 3，問題 4 より．□

（やました じゅんいち）

数学を楽しむ
裏返す

西山　豊

1. キューブ・パズル

2005 年 4 月から 1 年間，在外研究でイギリスのケンブリッジ大学に滞在することになった．地図をもらおうと思って旅行案内所に入ったところ，面白い木製のキューブを見つけた（図 1）．

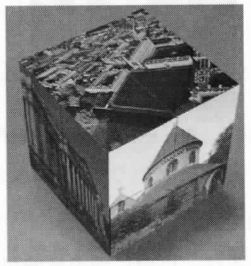


図 1．キューブ・パズル

ケンブリッジは人口 10 万人の小さな大学街であるが，31 のカレッジ群と大学の学部と研究所などで構成され，大学の端から端までは歩ききれない広いところである．キングス・カレッジ，セント・ジョンズ・カレッジ・，ラウンド・チャーチ，聖メアリー教会，ヘンリー 8 世像，フィッツウイリアム博物館，ケム川にかかる数学橋，ため息橋などの建造物は中世から保存されているものが多く，大学に通う学生だけでなく，休日は観光客でにぎわっている．

キューブにはこれら観光地の写真が立方体の表面に貼り付けてある．6 つの面に単純に貼り付けているのではなく，このキューブは図 2 のように縦，横いろいろな方向に折りたたむことができてつぎつぎと違った写真を見ることができる．正方形の写真が 6 枚，正方形を 2 つつなげた写真が 3 枚の合計 9 枚の風景であった．折りたたみの構造が面白いので，ひとつ購入して宿泊先に持って帰った．

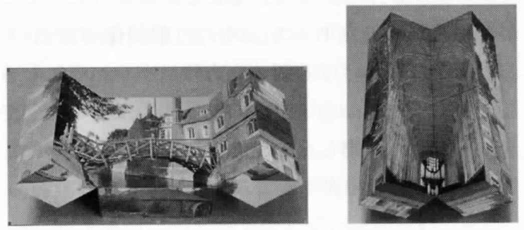


図 2．キューブの折りたたみ

風景の写真が 9 枚とは変な数字だ．でもこの理由はすぐにわかった．正方形の写真の大きさに計算しなおすと $6 + 3 \times 2 = 12$ 枚となる．立方体は面の数が 6 であり，6 を 2 倍すると 12 となる．これで写真の枚数 12 と一致する．12 がパズルの構造に関係する数字でありそうだということがわかった．

キューブの構造がどのようになっているかを調べてみた．まず基本単位として 1 辺が 3.5 センチの立方体がある．この立方体が全部で 8 個あり，それらが 3 次元の方向に積み上げられて（$2 \times 2 \times 2 = 8$）キューブになっている（図 3）．

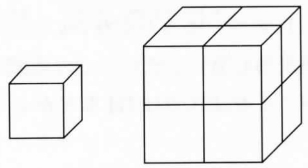


図 3．8 個の立方体

木製のキューブは非常に精密に作られていて隙間がなく写真のつながりを感じさせない．また堅くて重い材質の木であるので，操作をするたびにカチ，カ

チと心地よい音がする．8 個の立方体は上質の写真のフィルムのようなもので張り合わされている．ラミネート加工というのだろうか，簡単に破れそうにない．

さて，8 個の立方体がどこでどうつながっているかが一番興味のあるところだ．買ったその日は操作を繰り返しながら仕組みの解析を楽しんだ．風景の写真 1 枚は正方形が 4 個でできている．先に示したように風景は全部で 12 枚の勘定になっている．最小単位の立方体は 6 面あり，これが 8 個あるから，面の数は全部で 48 面になる．1 枚の風景が 4 面で構成されるから，48 面を 4 面で割ると 12 枚になる．ということは立方体のすべての面をうまく利用してできているパズルであることになる．

なんども操作するうちに，8 個の立方体は図 4 の太線の箇所がつながっていることがわかった．つながりの場所は 8 箇所あり，その位置関係が面白い．このようにつなげば 8 個の立方体はバラバラになることなく，また 48 面のすべての面を見せることができる．誰が考え出したのだろう．立方体を裏返すことができるとは！実に素晴らしいアイデアである．

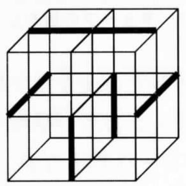


図 4．立方体のつながり

ここまで調べてみると，あとは自作してみたくなるものだ．商品と同じで木製のものを作ろうと思ったが，旅行先なので木やノコギリが手に入らない．そこで厚めの画用紙でできないかと考えた．文房具店で紙とセロテープ，のりを買ったが，値段が非常に高いのに驚く．日本では紙をふんだんに使えたが，そうではなく，文房具は貴重な商品である．さらにコピー紙の B 系列がまったくないのに困った．日本では A4, A3, B4, B5 などすべての用紙がそろえられているが，イギリスでは B4 などがなく A 系列だけである．

とにかく，厚めの画用紙で 8 個の立方体を作り，実物と対比させながらセロテープでつないでみた．時間がかかったがそれらしきものができた．やはり紙製にしてよかった．工作が楽であるし，紙で作ると多少の寸法違いが許されるという利点がある．紙はやわらかく 8 個の立方体を全体として調和させてくれる（図 5）．

図 4 につながりを示したが，最小単位の正方形の 24 個の面は 1 つにつながっているのである．この面を表の面としよう．そして隠れている 24 個の面（裏の面）も 1 つにつながっている．表の 24 面と裏の 24 面もつながっていて，全体の 48 個の面がつながっていることになる．操作をすると完全に裏返すことができるのであり，このキューブ・パズルは立方体の裏返しパズルであることに気付く．

このキューブ・パズルが裏返しとして可能なのは $2 \times 2 \times 2 = 8$ の立方体の場合だけであろう．$3 \times 3 \times 3 = 27$ になれば操作が不可能で面の数も勘定があわなくなる．このあたりは数学的には面白いところである．興味のある読者は自作してください．

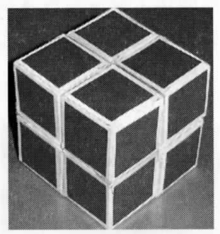
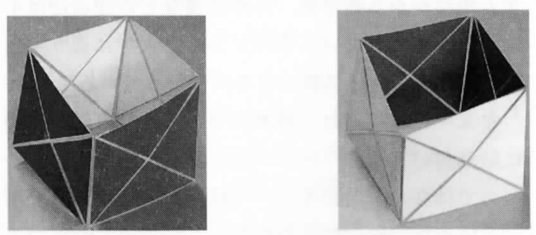


図 5．キューブの裏返し（自作）

2. 帯の裏返し

裏返すといえば，以前に別の意味での裏返しパズルを調べたことがあるので，それを紹介しておきたい．このパズルも立方体であるが，図 1 のような中の詰まった完全な立方体ではなく，紙を立方体状につないだ帯のパズルである．図 6 (1) のようなものを作成し操作を繰り返すと図 6 (2) のように裏返すことができるのである．この操作の過程はまるで知恵の輪を見るようである．



(1)　(2)

図 6．帯の裏返し

パズルの醍醐味は解答を見るのではなく，自分で解くことであるので，ここでは解答を差し控えよう．読者にはこのパズルを自作することを勧めたい．裏返しの方法は現在のところ 2 通りの解答が見つかっている．この解答を私があえて知らせないと言うことは，もしかして第 3 番目の解答が見つかるかもしれないという期待をこめるからである．

さて作り方であるが，画用紙で作って色を塗るという方法もあるが，これはあまりすすめたくない．それはマジックペンなどで塗るとむらができて仕上がりがよくないからである．それより，画材店などでアート紙が売られてあるのでそれを買って使ったほうがよい．青色，赤色，緑色それぞれ自分の好みの色を選ぶとよい．色のついている側は傷をつけないようにして，裏側の白色の面に定規をあてて作図する．図 7 のような感じで 1 辺が 7 センチの正方形を 4 個よこにつなげる．そして対角線を引き直角二等辺三角形を 16 個にする．

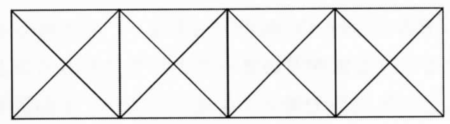


図 7．帯パズルの作成図

せっかちな人はこれでパズルが完成したと思うが，そうではない．ここからが肝心である．16 個の三角形をハサミできれいに切り離す．そしてこのパズルがうまく作動するように三角形と三角形の間は図 8 のように隙間をあけてセロテープでつなぐ．正方形の 1 辺が 7 センチであるから隙間は 2 ミリくらいがいいだろう．この間隔が大きすぎると見栄えがよくないし小さすぎると作動しなくなる．

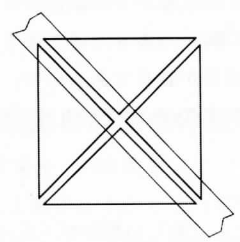


図 8．隙間をあけてセロテープでつなぐ．

セロテープはまず白地の方から張り，うまくいけば色つきの方を張るとよい．色つきの方は失敗がきかないからだ．セロテープは両面に張ること．セロテープは正方形をはみ出すように張ること．そして全部張り終わったあとに，はみ出した部分をハサミで切り落とせばよい．というのは，セロテープの張りなおし，重ねはあまりすすめられないからだ．

パズルは自分で解くことに楽しみがある．あれこれしているうちに解けることもあり，戻せなかったりすることもある．解法には必ずルートがあり，強引に裏返してはならない．不思議なことにそのルートを知れば裏返すことができるのだ．このパズルの面白さは立方体状の帯であることだ．帯状の面の数が増えて，たとえば 5 面，6 面のように大きな輪になったとしたら簡単に裏返すことができ，パズルでなくなる．帯の面の数が 4 面で立方体であることが鍵になっているところは，図 1 で示したキューブ・パズルが立方体であることと不思議と似ている．

どうしても解答を知りたい読者のために参考文献を示しておくと，まず M. ガードナーによるオーソドックスな方法がある [1]．手順は約 12 手とちょっと長いが，こちらの方法はよく知られている裏返しの手順である．もうひとつは私が知人から教えてもらったものを『数学セミナー』に載せたものである [2]．こちらは手順が約 7 手とずいぶん短い．あれっ！こんな操作ができるのかと思われるぐらい，鮮やかに裏返しができる．私は解答を聞くまで裏返しができなかった．

裏返しがなかなかできなくて，ヒントを求める人がいる．そういうとき私はいつもつぎのように言っている．パズルには表と裏がある．ということはかならず中間地点があるはずだ．表が半分，裏が半分見えているのが中間地点だ．その中間地点を見つければ裏にも表にも行ける．これは山登りと同じで，頂上が中間地点であるので戻ることもできるし，向こう側へ降りることもできるのだ．だから中間地点さえ見つかれば解けたと同じである，と．

3. ヘキサ・フレクサゴン

裏返しの話題を 2 つしたが，つぎに紹介するヘキサ・フレクサゴンもある意味での裏返しパズルである．ヘキサ・フレクサゴンのヘキサとは 6 の意味で，フレクサゴンとはフレキシブルなもの，つまり折りたたみ可能なものの意味である．図 9 は自作したヘキサ・フレクサゴンである．6 角形をしていて，図 10 (1) のように三角形を 2 つずつ三菱のようにつまむと中心から新しい面が顔を出してくる．完全に開く

と図10 (2) のような別の面となる．表れる面の数は3個で，正確には裏返しではないが違った面が出てくるという意味では同じパズル群に属するであろう．

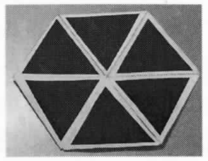
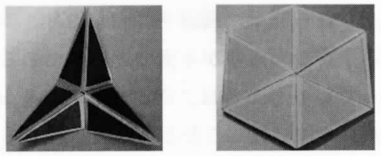


図9. ヘキサフレクサゴン



(1) (2)

図10. 三菱のようにつまむと別の面が出る.

面の数は3個であるが，たとえばこれに色づけをしておくと青色，黄色，赤色の面が繰り返しあらわれることになる．このパズルも不思議なパズルであり，まだ作ったことのない読者のために作り方を説明しておこう．

図11 (1) のように1辺が6センチの正三角形を横方向に10個並べる．右端の「のり」と書いた正三角形はパズルには関係せず，ただ，のりづけだけのためにある．この程度の図ならコンパスと定規で作成できるので各自作成すること．用紙は画用紙でなく普通のコピー紙のほうがよい．コピー紙は折り曲げ操作が簡単で破れにくい．

折り方は，まず図11 (2) のようにa-bに沿って手前に折る．つぎにc-dに沿って谷折りをして「のり」の下をくぐらせる（図11 (3) ）．そしてe-fに沿って手前に折り，のりづけすれば完成である．メビウスの帯は普通の帯を180度ひねってのりづけした帯であるが，ヘキサフレクサゴンは180度の3倍，つまり540度ひねってのりづけした帯である．180度の奇数倍ひねってのりづけすると裏と表の区別がないつながった平面になる．このパズルはトポロジーを応用したものである．

パズルができたら，是非とも操作してください．図10 (1) のように正三角形を2つずつ摘んで三菱のような形をつくると，意外や真ん中から新しい面が出てくるのだ．この感激は作って操作をした者にしか味わえないものであろう．

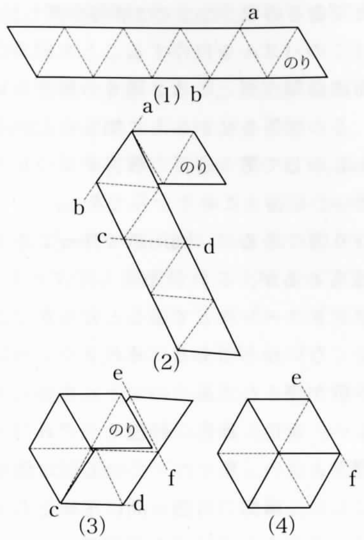


図11. 3面折りの型紙と折り方

ヘキサフレクサゴンの別の楽しみ方は，3つの面が出る3面折りを完成したとすれば，つぎは4つの面の出る4面折りに挑戦するとよい．4面折りを実現するには型紙がどのようであって，折り方はどうなるのかと自分で考えると楽しくなる．4面折りができたら，5面折りへと実行するうちに法則らしきものを見つけることになり，パズルから数学の領域に入っていく．

私はM. ガードナーの本に掲載されていた型紙を参考にして4面折り～8面折りを完成させた．3面折り，6面折り，12面折りなど面の数が3 × 2nの場合は型紙と折り方に法則性があることを知った．そして，趣味が高じて24面折りまで作ってしまった．それ以外の面についての型紙と折り方についても方法がわかった．なかなか面白い体験をしたものである．本誌では「たたみかえの数理」として，その全容を紹介した．興味のある方はご覧ください[3]．でも，ここには解答が載せてあるので，自分で解きたい読者は見ないほうがいいかもしれない．

●参考文献

(1) M. ガードナー『新しい数学ゲームパズル』白揚社，1968年
(2) 西山豊「つくってみよう，解いてみよう」『数学セミナー』1994年10月
(3) 西山豊「たたみかえの数理」『理系への数学』2004年4月

（にしやま ゆたか／大阪経済大学）

自然科学の華
微分方程式
第11回

追跡曲線

清 史弘

1. はじめに

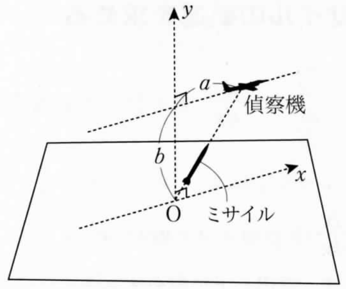
最近のミサイルは「赤外線追尾装置」というものが備え付けられていて，戦闘機のように動く目標物に対してはそこから出るガス，熱等に反応しそれを追いかけるように進路を設定することができます．そこで，今月号では上空の飛行物体をこの赤外線追尾装置を備えたミサイルが追いかけるとき，ミサイルがどのような軌道を描き，どのくらいの時間が経過した後に目標物を捕らえるのかについて考えていこうと思います．

さて，今O地点の真上を偵察機Pが通過したとしましょう．この偵察機はこの後も高さを変えずに上空を速度 v_P で等速運動しているものとします．また，O地点には追撃ミサイルが設置しておりPが水平距離で a だけ離れたときにPをめがけて一定の速さ v_M（ただし，$v_M > v_P$）で「追いかける」ものとします．この場合の「追いかける」の意味は，つねにミサイルの進行方向には偵察機があるようにPよりも速い速さで「追いかける」の意味です．

2. 座標の設定と問題点の整理

この問題の場合，偵察機PとミサイルMはつねにある平面内を動きますからこの平面を xy 平面とし，x 軸を水平方向，y 軸を鉛直方向にとります．

また，Pは直線 $y = b\ (>0)$ 上をOから遠ざかるように速度 v_P で動き，ミサイルが発射されたとき点 $(a,\ b)\ (a>0)$ を通過したとします．したがって，ミサイルが発射されて t 秒後のPの位置は $(a + v_P t,\ b)$ となります．



一方，ミサイルMが発射されてから t 秒後の（Mの）位置を $(x_M(t),\ y_M(t))$，あるいは単に $(x_M,\ y_M)$ で表すことにします．これから求めるのはMの軌道（これを L とおくことにします），すなわち，x_M と y_M の関係式です．これを求めることによってMがどの地点でPに追いつくか，そして，Pに追いつくまでにどのくらいの時間がかかるかがわかります．また，以下においては時間に関する微分を $\dot{x}_M$ のように表すことにします．

さて，Mの速度ベクトルは $\begin{pmatrix}\dot{x}_M\\ \dot{y}_M\end{pmatrix}$ ですから点Mにおける L の接線の式は

$$y - y_M = \frac{\dot{y}_M}{\dot{x}_M}(x - x_M)$$

となります．