

$$x^2 + y^2 = (a \cosh \theta)^2, z = b \sinh \theta \quad (3)$$

と書ける。ここで、関係式

$$(\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1$$

を使って、(3) から θ を消去すると

$$x^2 + y^2 = a^2 (1 + z^2/b^2)$$

つまり

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1$$

となる。これが求める回転面の方程式である。□

問題4によって z 軸を回転軸とする回転1葉双曲面の方程式は

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

と書けることがわかった。

問題5 回転1葉双曲面

$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ (4) が与えられたとき、

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (r > 0) \quad (5)$$

の形の球面が(4)に内接する必要十分条件を求めよ。

【解答】 球面(5)の中心は z 軸上にあるので、回転対称性から、(4)が(3)に内接することと、 xz 平面上で、双曲線

$$x^2/a^2 - z^2/b^2 = 1 \quad (6)$$

と円周

$$x^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (7)$$

が接することは同値。したがって、 xz 平面上で、双曲線(6)と円周(7)が接する条件を求めればよい。(6)

と(7)から x を消去して整理すると、

$$(a^2 + b^2)z^2 - 2b^2cz + b^2(a^2 + c^2 - r^2) = 0$$

となるので、求める必要十分条件は

$$b^2c^2 - (a^2 + b^2)(a^2 + c^2 - r^2) = 0$$

つまり

$$(a^2 + b^2)r^2 - a^2(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \quad (8)$$

となる。□

(8) から、 r を a, b, c で表すと

$$r = a\sqrt{1 + c^2/(a^2 + b^2)}$$

となる。これを見れば、 r を $|c|$ の関数と見ると、単調増加関数となっていることがわかる(まあ、直観的には「明らか」なことだが)。また、 c を a, b, r で表すと

$$c = \pm\sqrt{(1 + (b/a)^2)(r^2 - a^2)}$$

となる。ここで $r \geq a$ となることに注意してほしい。(もし、 $r < a$ だとしたら球面(5)は回転1葉双曲面

(4)をくぐり抜けてしまい、接することはできない。)

問題6 平面

$$z = \mu x + \lambda \quad (9)$$

与えられたとき、(9)と

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (10)$$

の形の球面が接するための必要十分条件を求めよ。

【解答】 対称性から xz 平面(つまり平面 $y = 0$)上で直線(9)と円周(10)が接する条件を求めればよい。これは、2次方程式

$$x^2 + (\mu x + \lambda - c)^2 = r^2$$

つまり

$$(1 + \mu^2)x^2 - 2\mu(c - \lambda)x + (c - \lambda)^2 - r^2 = 0$$

が重解をもつための条件にほかならない。したがって、求める条件は

$$(\mu(c - \lambda))^2 - (1 + \mu^2)((c - \lambda)^2 - r^2) = 0$$

つまり

$$r^2(1 + \mu^2) - (c - \lambda)^2 = 0$$

となる。□

問題7 1葉回転双曲面

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad (11)$$

と平面

$$z = \mu x + \lambda \quad (12)$$

が与えられたとき、

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (r > 0) \quad (13)$$

の形の球面が(11)に内接し(12)に接するための条件を求めよ。

【解答】 問題5の結果から、(13)が(11)に内接する条件は

$$(a^2 + b^2)r^2 - a^2(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \quad (14)$$

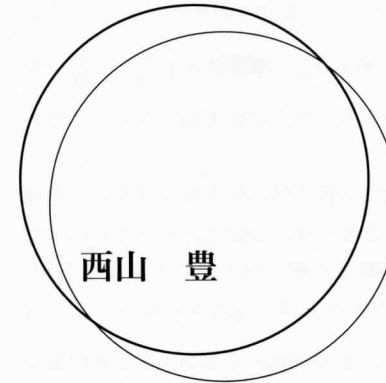
また、問題6の結果から、(12)と(13)が接する条件は

$$r^2(1 + \mu^2) - (c - \lambda)^2 = 0 \quad (15)$$

したがって、(14)と(15)が求める条件となる。□

ダンドランの定理の拡張をめざして話を進めたいが今回はもうページが尽きてしまった。(つづく)

(やました じゅんいち)



数学を楽しむ

オルダム継手からエアコンまで

1. ある博物館で

数学は教科書の中だけでなく生活の中に存在する。数学は抽象的な数式だけでなく、つねに具体的である。何か面白い教材がないかと京大総合博物館を見学しているとき、オルダム継手という機械の模型に目がとまり、私はそのように感じた。オルダム継手(Oldham's coupling)は、19世紀から20世紀にかけて近代化のためドイツから輸入した機械のモデルで、オルダムは考案者の名前のようにである。手で触ることができ、その奇妙で不思議な動きのとりこになってしまった。

ここに、わずかにずれた平行な2本の軸がある。左の軸の回転を右の軸に回転を正確に伝えるためにはどうすればいいのだろうか。素人考えでは、歯車を3個用いることがうかぶ。歯車の歯数が同じものを2個、それに回転の向きをかえるための1個の合計3個で可能だ。しかし、軸間の距離があまりにも小さいときは、そうとう小さい歯車が必要でこれは現実的ではない。自動車などに使われている自在継手というのがあり、これを用いれば可能といえば可能であるが機構が複雑になる。また、ベルトをかけるという方法も考えられるが、ベルトは伸び縮みするし、すり減ったりするので回転が正確には伝わらない。

ここに紹介するオルダム継手は、きわめて数学的で、その数学も高等な数学ではなく中学生程度の幾何学の知識があれば理解することができるので是非とも読者に紹介しておきたい。

2. 平行な軸に回転を伝える

オルダム継手の構造を森田鈞の文献をもとに模写したものが図1である⁽¹⁾。3つの円盤 a, b, c からなり、 a または c に回転を与えると、 b は a と c に対してすべりながら回転する。この機構のことを回り両スライダ機構といい、 b のことを「二重すべり子」とよんでいる。 a と c は円盤の直径に沿ってみぞが切っており、 b は図1(2)に示すように両面にそれぞれ直角をなす突起がでていて、これが a と c のみぞに入るようになっている。 a がある角度回転すると、 b も c も同じ角度回転するので、 a と c の角速度は等しくなる。

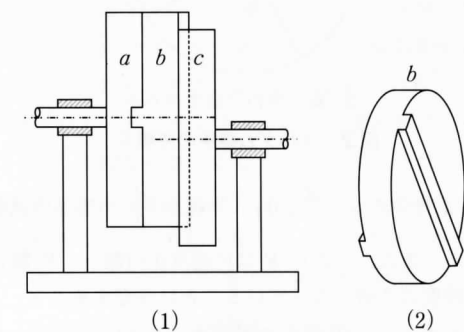


図1. 回り両スライダ機構

オルダム継手の左端と右端の円盤 a, c は等角速度の円運動をしているが、真ん中の円盤 b の運動は円でも楕円でもなく奇妙な動き方をする。サイクロイドやトロコイドのように媒介変数を使った運動をする。以下、それを数式で確認してみよう。

3つの円盤を図2のようにモデル化してみた。円盤 a の溝の先端の点を P 、円盤 c の溝の先端の点を

Qとする。PはO₁が中心で半径rの等速円運動をしている。QはO₁とdだけ離れたO₂が中心で半径rの等速円運動をしている。P(x, y)とQ(x, y)の座標はつぎようになる。

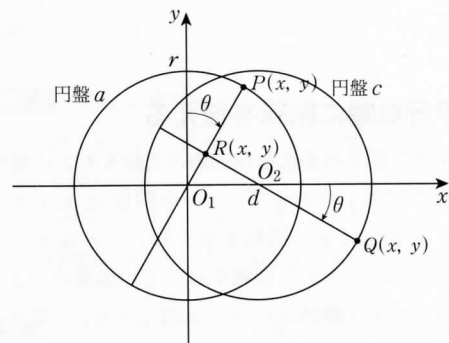
$$P\left(r\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), r\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$$

$$Q\left(r\cos(-\theta)+d, r\sin(-\theta)\right)$$

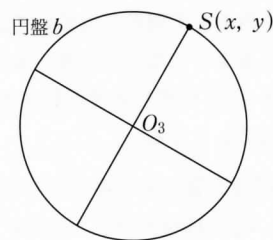
2つの直交する溝の交点の座標をR(x, y)とすると、これが円盤bの中心O₃となり、計算により

$$R\left(\frac{d}{2}(1-\cos 2\theta), \frac{d}{2}\sin 2\theta\right)$$

となる。



(1) 左右の円盤



(2) 真ん中の二重すべり子

図2. オルダム継手の座標系

点Rは中心が $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ 、半径が $\frac{d}{2}$ の等速円運動となる。また、この点Rは角速度が円盤a、円盤cの角速度の2倍になっていることに注意すること。

したがって、円盤bの円周上の点S(x, y)はつぎようになる。

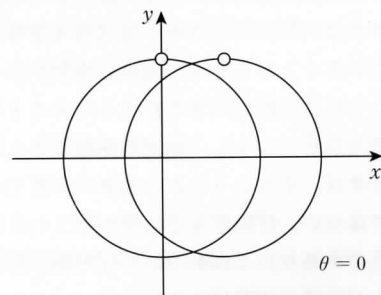
$$S(x, y) = R(x, y) + P(x, y)$$

角速度を ω 、時間をt、角度を θ とすると、 $\theta = \omega t$ であり、P(x, y)は角速度 ω で動き、中心R(x, y)は角速度 2ω で動くので、S(x, y)は角速度が一定でないことがわかる。tに関してx方向の微分、y方向の微分が計算できるが、サイクロイドと同じように単純な数式($f(x, y) = 0$ のような形)

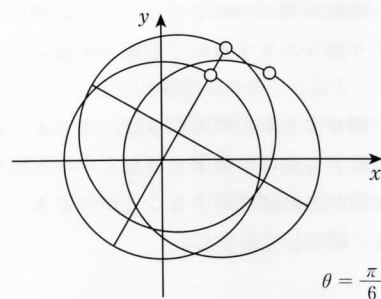
で表すことはできない。数式で明示できないが、 Δt を小さくにとってS(x, y)、導関数 $S'\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ を数値計算してみると、等角速度運動でないことがわかった。

なお溝の直交性の関係は必要条件ではない。角度を持たせておくことだけが必要で、そうすれば2つの軸間に回転運動を正確に伝えることができるが、ここではそれについては深く立ち入らない。

θ が0から $\frac{\pi}{2}$ まで変化するとき、3つの円盤がどのように動くかを図3にまとめた。変化の様子を知るために円盤上の点を丸印で示した。円盤aと円盤bは溝の先端の点であるが、円盤cは溝から $\frac{\pi}{2}$ だけずらして表示してある。左右の円盤aとcは中心が固定されているので単純な円運動をするが、真ん中の円盤bは中心がつねに移動するので複雑な動きとなる。軌道は円軌道でも楕円軌道でもない。また速度は等速ではなく、最初は円盤aの位置から始まり($\theta = 0$)、しだいに速度を増しながら進み、最後は円盤cの位置に重なる($\theta = \frac{\pi}{2}$)。円盤bが移動した領域の包絡線は中心が $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ 、半径が $r + \frac{d}{2}$ の円となる。したがって、円盤bはこの円をはみ出ることはない。



$\theta = 0$



$\theta = \frac{\pi}{6}$

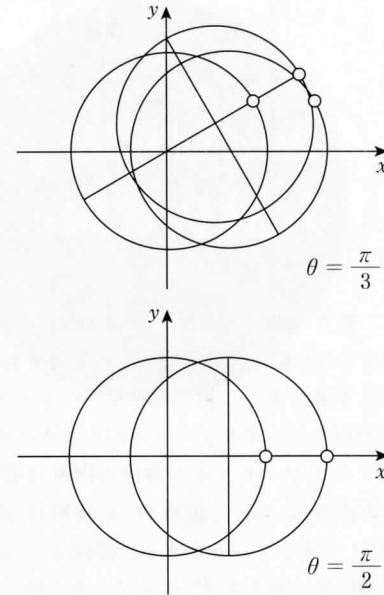


図3. 推移図 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

座標を数式化して、その方程式を微分すれば速度の変化を知ることができるが式が煩雑になるのでここでは割愛する。それにしても円盤bの複雑な動きには驚かされる。

オルダム継手の動きを数式では確認できたが、ほんとうにうまく動くのだろうか。私は模型が作ってみたいと思った。最初は厚めの画用紙で作ってみたいがうまく動かなかった。そこで木で作ってみることにした。あるDIYの店で工作用の部材が販売されていたので、それを組合せて作ったのが図4である。約2000円の材料費で作れた。みぞを切ったり突起を作ったりの凹凸の部分は精度が要求されるのでお店の人にカットしてもらった。博物館で見たオルダム継手は金属製だが、木製でもその機能を再現するには十分であった。

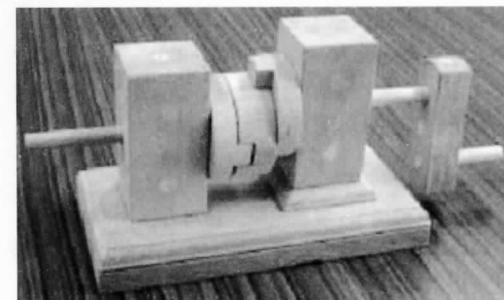


図4. 自作したオルダム継手の模型

その後、別の会合でオルダム継手を紹介すること

があった。大阪教育大学の菅原邦雄さんから、直径の異なるストローを用いれば紙でも模型を作れることを教えてもらった。数学のアイデアが産業機械に反映されているのを知って、数学を専攻していることをなんとなく嬉しく思った。

図4の写真だけで動きがわかりにくい場合は、インターネットのホームページで検索すれば、オルダム継手の動画をMPEG形式で見ることができる。私は2~3のサイトでそれを見つけた。高専または工学部機械学科の授業ではオルダム継手が教えられているようである。

3. エアコンのコンプレッサー

この記事が『数学セミナー』で紹介したところ何人かの読者から手紙をいただいた。その中のひとりから「オルダム継手が面白いところに使われている」ということを教えていただいた。それはエアコンの中のコンプレッサーに使われているというのだ。

エアコンの冷房の原理は、気体をまず圧縮し、それを膨張させることによって熱を奪うということであるが、エアコンにはどうしてもコンプレッサー(圧縮機)が必要である。そのコンプレッサーの技術は、最初はピストン方式であったが、ルーローの三角形を応用したロータリー方式へと技術が進み、そして現在、さらに改良が進みスクロール方式というのがあるらしい。そのスクロール方式は、オルダム継手そのものではないが、「二重すべり子」の原理が使われている。スクロール方式のエアコンは振動や騒音が少なく、カーエアコンにも使用されている。

数学のアイデアがエアコンの中に使われているのに、私たちはなぜ気づけなかったのか。それはコンプレッサーが精密なものであるから、しっかり鋳物で固められていて内部を見ることができないからだ。

スクロール方式は固定スクロール(灰色)と可動

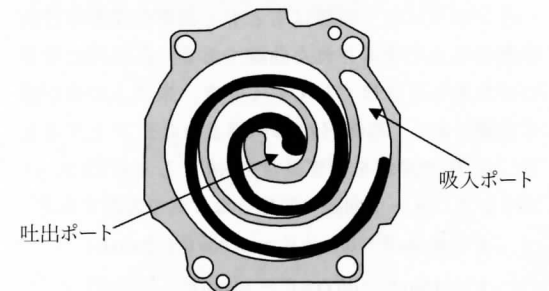


図5. コンプレッサー(スクロール方式)

スクロール (黒色) からなり、可動スクロールは固定スクロールのまわりを擦り寄りながら回転する (図5)。吸入ポートから入ってきた気体は可動スクロールが約3回転するあいだに中心部に圧縮されて吐出ポートから出される。

最近では企業ミュージアムというのが流行っていて、企業が自社の製品を紹介するために博物館を作り一般の見学を無料で許可しているところが多い。私はエアコンのメーカーであるダイキン (大阪) の展示室に行ってスクロール方式の模型を見せていただいた。これも動きが面白いのでデジカメのMPEG方式で録画した。

私は京大総合博物館で見たオルダム継手のリンク機構にびっくり、この機構がエアコンに使われていることを知ってびっくり、ということで二度びっくりしたことになる。

4. 歯車のインボリュート曲線

固定スクロールと可動スクロールに使われている曲線を図示すると図6になる。この曲線はインボリュート曲線というもので、よく知られているらせん曲線に近いが少し違う。インボリュート曲線の位相を180度ずらしたものをもうひとつ用意し、2つを重ね合わせてオルダム継手のように作動させると、図5に示したスクロール方式の仕組みがよくわかる。

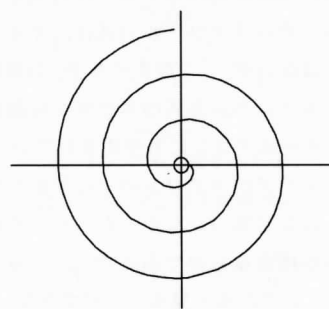


図6. インボリュート曲線

インボリュート曲線はもともと歯車の歯形の技術革新のなかで考案された曲線である。基礎円に巻きつけた糸をときほぐしていくとき、糸上の点を描く曲線である。基礎円Oの円周上の点をPとすると、点Pで接線を引き長さを $a\theta$ とした点 $Q(x, y)$ がインボリュート曲線の座標となり式で表現すると

$$x = a \cos \theta + a\theta \sin \theta = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$$

$$y = a \sin \theta - a\theta \cos \theta = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$$

となる。

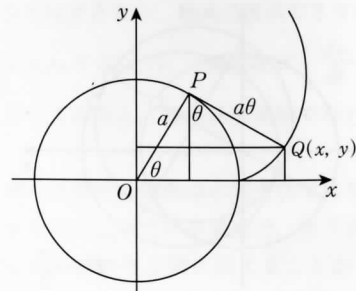


図7. 歯車とインボリュート曲線

歯車は2つの回転体の運動を伝えるものであるが、歯形が特に重要である。歯形はサイクロイド歯形やピン歯形を経てインボリュート歯形が歯車に最も適していることとなった。その理由を図8に示そう。歯車 O_1 の歯形は AA' 、歯車 O_2 の歯形は BB' であり、点Pで接しているとする。接点Pは2つの歯車の共通接線の線上を P_0 から P_3 まで動く。

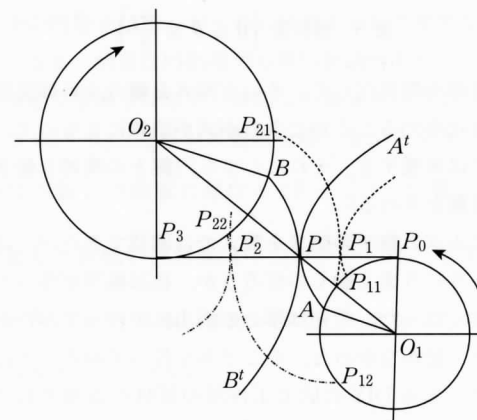


図8. インボリュート歯形のかみ合い

O_1 の回転を進めると接点は P_2 となり O_2 に回転が伝えられ、そのときの歯形は $P_{12}P_2$ と $P_{22}P_2$ である。 O_1 を逆方向に回転させると接点が P_1 となり、そのときの歯形は $P_{11}P_1$ と $P_{21}P_1$ である。

2つの歯車は接点を通じて回転運動が伝えられる。その接点は共通接線上を動く。接点が直線上を動くようにするためには、歯形がインボリュート曲線であることだ。実に数学的ではないか。数学が教科書だけでなく生活の中に生きているのだ。

(参考文献)

- (1) 森田鈞『機構学』実教出版、1974年、p158-p159
- (2) 齋藤二郎『機構学のアプローチ』大河出版、1976年、p146-p147
- (3) 西山豊「博物館で見たオルダム継手」『数学セミナー』2004年2月

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

自然科学の華 微分方程式

第10回

最速降下線

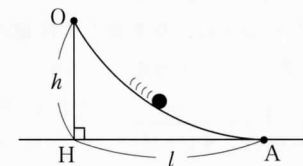
清 史弘

1. はじめに

最も早く滑り終わる滑り台を考えましょう。すなわち、次のような問題を考えます。

【問題】

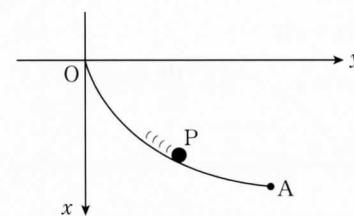
地面 (水平面) から高さ $h (> 0)$ の位置に点Oがある。Oから地面におろした垂線の足をHとし、Hから水平距離 $l (> 0)$ の位置に点Aがある。Oから滑り始めてAに到達する滑り台を作るとき、最も早くAに到達するような滑り台はどのような曲線になるように作ればよいか。(ただし、滑り台はO, A, Hを含む平面に含まれるものとする)



今回は、話を簡単にするため一部数学的に厳密ではない部分が含まれます。おおよそどのような経緯から最も早く滑り終わる曲線 (最速降下線という) が得られるのかを楽しんでいただけるとよいと思います。

2. 設定と問題点

図のように x 軸、 y 軸を定め、球Pを点 $O(0, 0)$ から点 $A(x_A, y_A)$ まで転がすこととします。



ここで、Pの質量を m 、重力加速度を g とし、Pの初速度は0とします。また、Pが転がる軌道を $C: y = y(x)$ とし (C は十分に滑らかとします)、Pが C 上を転がってOからPに達するまでにかかる時間を T とおきます。さらに T が最小になるような C を考えるので $\frac{dy}{dx} > 0$ であることおよび T を最小にするような C が存在することを仮定します。

さて、Pの x 座標が x ($0 \leq x \leq x_A$)のときのPの速さを $v(x) (\geq 0)$ とおくと、エネルギー保存則から

$$mgx = \frac{1}{2}mv(x)^2$$

が成り立つのでここから

$$v(x) = \sqrt{2gx} \quad (\because v(x) \geq 0)$$

が得られます。ここで、 C 上のOからPまでの弧長を s とおくとPが微小長さ ds を通過するのにかかる時間は

$$\frac{ds}{v(x)} = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}$$

であり、さらに

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

であるので、OからAまでの弧長を L とおくと

$$T = \int_0^L \frac{ds}{v(x)}$$

$$= \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gx}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_A} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad \dots (1)$$

となり、(1)で与えられる T を最小にする $y = y(x)$