$(a\sin\theta,\ -a\cos\theta,\ c)$

$(-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ c)$

の直線だとわかる（これは命題1において別の形ですでに確認済みだが）．この2個のベクトルは，長さがどちらも $\sqrt{c^2+a^2}$ に等しく，和が $(0,\ 0,\ 2c)$ に等しいことから，母線 $L(\theta)$ と $M(\theta)$ は，点 $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ を通り回転1葉双曲面の回転軸（z 軸）について線対称になっている．また，この2個のベクトルのなす角を ϕ とすると（内積を考えて）

$$\cos\phi=(c^2-a^2)/(c^2+a^2)$$

となることもすぐにわかる．さらに，$L(\theta)$ と $M(\theta)$ はどちらも平面

$$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=a \qquad (6)$$

上にあることが容易に確かめられるので，この平面(6)は $L(\theta)$ と $M(\theta)$ で定まる平面の方程式になっている．つまり，回転1葉双曲面(1)と平面(6)の共通部分（交わり）が2直線 $L(\theta)$ と $M(\theta)$ だということになる（図4）．また，平面(6)は平面 $x=a$ を z 軸のまわりに θ ラジアンだけ回転させた平面にほかならないので，言葉を換えると，z 軸のまわりに（z 軸と）ねじれの位置にある直線 $L(\theta)$ と $M(\theta)$ を1回転させると回転1葉双曲面(1)がえられることになる．

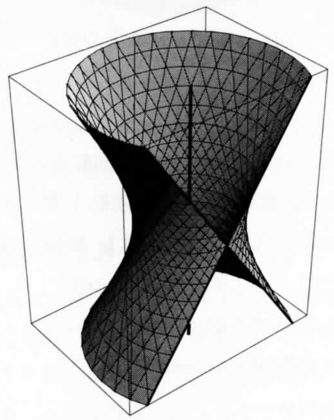


図4

4．ダンドランの定理

これでようやく回転1葉双曲面についてのダンドランの定理を証明できる地点にたどり着いた．とりあえず，回転1葉双曲面(4)と平面の共通部分（交わり）が有限の範囲に収まっている場合について考えよう．先月号で直円錐面についてのダンドランの定理を証明したので，それをまねて証明の概略を書いておく．

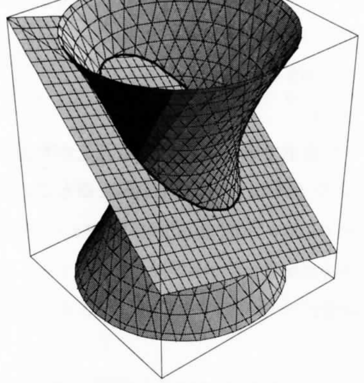


図5

1) 回転1葉双曲面 H に内接し平面 A に接する球面を S_1，S_2 とする．H と S_1，S_2 が接する円周を C_1，C_2 とし，球面 S_1，S_2 と平面 H の接点を F_1，F_2 とする．（平面を決めれば F_1，F_2 は決まる．）
2) 回転1葉双曲面と平面の共通部分の任意の1点をPとする．
3) P を通る回転1葉双曲面 H の母線 m（2本あるがそのうちの1本）と，球面 S_1，S_2 の接点を G_1，G_2 とする．（注意：G_1，G_2 はそれぞれ，円周 C_1，C_2 と母線 m の交点である！）
4) 一般に，球面外の点からその球面に引いた接線の接点までの距離は一定だということに注意する．
5) このとき
$$F_1P+F_2P=G_1P+G_2P=G_1G_2=\text{一定}$$
となることがわかる（注意：母線 b を回転1葉双曲面 H の回転軸のまわりにまわして任意に母線 b' を作るとき，C_1，C_2 を含む平面は回転軸に垂直なので，C_1 と C_2 の間に挟まれた b' の部分は回転角によらずにつねに一定である）．
6) 平面上で2個の定点からの距離の和が一定な点の軌跡は楕円になる（これを楕円の定義とする立場もありうる）．
7) したがって，回転1葉双曲面 H と平面 A の共通部分（＝Pの軌跡）は F_1，F_2 を焦点とする楕円となる．

以上によって，つぎのダンドランの定理がえられる．

定理（ダンドラン）

回転1葉双曲面 H と平面 A の共通部分 E が有限の範囲に含まれるとき，E は，H に内接し A に接する2つの球面と A の接点を焦点とする楕円となる．

［証明］ すでに終わっている． □

（やました じゅんいち）

卵形の数理

西山 豊

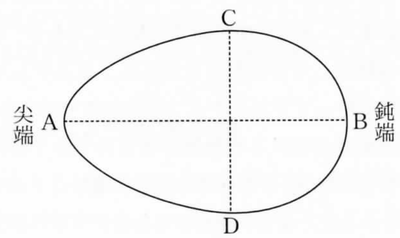
1．卵は斜面で止まる

生物学は今ではDNAが一番の話題であるが，形や数に注目してみると数学としての要素が多く含まれている．今回は卵形（たまごがた）の不思議について説明しよう．この話題は1979年8月号の『数学セミナー』に「卵の形」というタイトルで私が発表したもので，ずいぶん前のことであるが読み返してみていまでも新鮮で不思議に思う．

食材に使う卵の形について，皆さんは不思議に思われたことはないだろうか．卵（たまご）は卵の形をしているから卵形（たまごがた，らんけい）というが，なぜか．まるで禅問答のような問いかけをしたが，その秘密を少しずつ解き明かしていこう．数学では丸い図形の代表的なものは円である．円は中心と半径があれば決まる．高校になれば楕円というものを学び，楕円は円を横に長くしたもので，2つの焦点（あるいは定点）からの距離の和が一定の曲線である．

卵は円でも楕円でもない．卵は卵形をしている．卵をよく観察すると，中心からの距離が一定の円ではなく，横のほうが長く楕円のような形をしている．さらによく観察すると，横方向でも一方は丸くなっているが，もう一方は尖（とが）っている（図1）．これが卵形である．軸が長い方を長軸，短い方を短軸といい，丸い方を鈍端（どんたん），尖った方を尖端（せんたん）という．卵は，実際は3次元の物体であるから，円や楕円ではなく球や楕円体で表現しなければならないが，断面で考えても十分であるので，ここでは平面図形で説明する．

卵がなぜこのような形になったのかを考えてみよう．卵を机の上に置いてみる．長軸は机の面と平行ではない．尖ったほうが机の面に近く，丸いほうが机の面から遠い状態で静止する（図2）．楕円の場合は長軸と机の面は平行である．卵がどうして長軸を傾けて静止するかは，卵の重心の位置を考えれば理解できる．円や楕円の場合は重心の位置は上下，左右両端から等距離のど真ん中にあるが，卵の場合は一方が尖っていて一方が丸くなっているから，重心の位置は丸いほうに少しだけずれている．重心が真ん中からずれた卵を机の上に置くとどうなるか．図2に示すように，卵の重心Oからの重力Wと接点Pからの抗力Nが同じ直線上にあり，長軸が傾いて静止するのである．物理学の用語で説明したが，このように卵が傾くことは誰でも知っていることである．



AB：長軸　CD：短軸

図1　卵の形

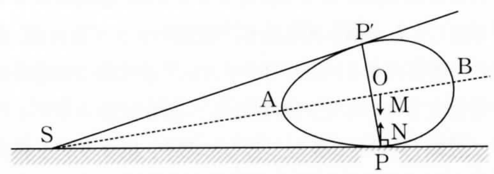


図2　卵は傾く

卵の長軸が傾くとどうなるか．それは斜面に卵を置いてみると，どのような位置に置いても卵は転がってし

まわずにある状態で静止するのである．これが不思議である．静止の状態は，卵の尖ったほうが斜面の上に向き，丸いほうが斜面の下に向くのである（図3）．卵の形にいままで関心のなかった読者はまずこれを実験で確かめて欲しい．

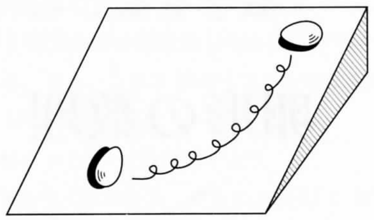


図3　卵は斜面で静止する

私の記事「卵の形」はその後，単行本『卵はなぜ卵形か』（日本評論社）に収録された．この記事を読んで，ある読者から一度だけ抗議を受けたことがある．机を傾けて卵を転がしてみたが卵は止まらなかった．これはウソを書いているので訂正すべきであると言ってきた．私は心配になってもう一度確かめてみたが，やはり卵は止まった．

ではなぜ読者の卵は止まらなかったのだろうか．多分，読者は机を30度くらいに傾けて転がしたのであろう．机の角度はわずかに5度未満に傾け，卵を手放すときはそっと慎重にしなければならない．図3は斜面を示すための概念図であり，この図から傾斜の角度を30度と読み取ってもらってはこまる．さらに机の面がつるつるだと止まらないことがある．ある程度の摩擦抵抗が必要だ．また，ゆで卵で実験してみたが，ゆで卵の場合は静止しなかったことがある．あるテレビ番組で収録用に持ってきたスタッフの卵がゆで卵であった．生卵は運搬時に割れる危険性があるのでゆで卵にしたと説明を受けたが，ゆでた時に重心が微妙にずれて卵が静止しなかった．また，卵をゆでるとザラザラがとれて摩擦抵抗がなくなることもある．そこで急きょ生卵に変えたことがある．

卵が斜面で転がっても静止することは，紙製のコップでも同じことが確かめられる．紙製のコップは普通，飲み口の円が大きく，底の円が小さい．手に持つ側面の部分を延長していくと円錐になる．卵も紙製コップも円錐で近似（外挿）できる．そこで卵や，紙コップを斜面で転がす問題は，円錐を斜面で転がす問題に置きかえることができる．円錐がなぜ斜面で静止するかを考えるのは，それほど難しくはない（図4）．

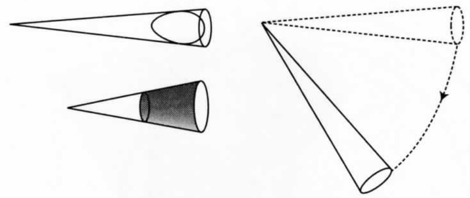


図4　卵や紙コップは円錐で近似できる

また，斜面でなくて水平な面でも卵や紙コップは遠くへ転がらないという特性がある．親鳥が雛をかえすために卵を抱いているとき，ひとつの卵が転がり出たとしよう．親鳥は卵をとり戻すために動くことが出来ない．円錐が円弧を描いて元の位置に戻るように，卵は円弧を描いて親鳥の元に戻ってくる．

2. デカルトとカッシーニの卵形線

卵形線（らんけいせん）を描く方法にはデカルトとカッシーニの方法がある．デカルトはつぎのようにして卵形線を定義した（*Descartes*, 1637年）．基準となる円が2つある．中心O_1で半径r_1の円と，x軸方向にaだけずれた中心O_2で半径r_2の円である．それぞれの中心を通る平行線を2本描き，相手の円との交点をB, Aとする（この場合O_1BとO_2Aが平行）．直線O_1Aと直線O_2Bの交点Pが卵形線の座標である．$m, n>0$とすると，$m\overline{O_1P}+n\overline{O_2P}=$一定の関係がある．$m=n$のときは楕円となり，基準円の半径が等しくなる（$r_1=r_2$）．図5は，Visual Basic プログラムによって描いたもので値を$a=1$, $r_1=1.2$, $r_2=1.8$とした．確かに卵の形をしている．

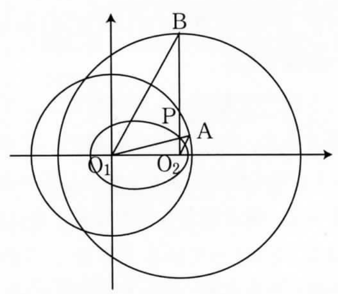


図5　デカルトの卵形線

卵形線を描くもうひとつの方法にカッシーニの方法がある．カッシーニはつぎのように卵形線を定義した（Cassini, 1680年）．2つの定点（あるいは焦点）A, Bからの距離の積が一定である点Xの軌跡は卵形線を描く（図6）．A, Bの中点Oを原点とし，A, Bを結ぶ直線を軸とする直交軸に関するその方程式は

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=k^4-a^4$$

となる．ただし$\overline{AB}=2a$, $k^2=\overline{AX}\times\overline{BX}$．

特に$a^2=k^2$ならば，Oは曲線の結節点となる．この場合，この曲線をレムニスケート（Lemniscate）という．カッシーニの卵形線は陰関数で表示されるのでこのままでは作図できない．この関数に$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$を代入すればつぎの極座標による方程式になる．

$$r^2=a^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4\cos^2 2\theta+k^4-a^4}$$

前者の方程式から卵形線を描くには等高線を描くソフトを使う．後者の方程式からは Visual Basic プログラムで比較的簡単に作図できる．

楕円の場合は2定点からの距離の和が一定であるが，カッシーニの卵形線は距離の積が一定である．kのパラメータを変えて卵形線を描いてみた．図6は$a=1$に対して$k=1.4$, 1.2, 1, 0.98のときの図である．$k>a$のときが外側の曲線で楕円的卵形であり，kが小さくなるにつれて$x=0$のあたりで細くなり，$k=a$のときが原点Oで交差するレムニスケート曲線となる．$k<a$のとき曲線は2つにわかれ卵形となる．一番内側の曲線は，ここで議論している卵の形をしている．

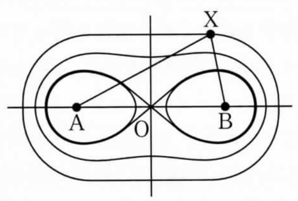


図6　カッシーニの卵形線

カッシーニ（1625−1712）はイタリアの天文学者でルイ14世に招かれパリ天文台初代台長となる．木星・火星の自転周期を測定，土星の環の空隙と4個の衛星を発見，火星・太陽の距離を算出するなど多くの業績をあげた．カッシーニは惑星の軌道を卵形線であると考えたが，実際は焦点の一方に太陽が位置する楕円軌道であることをニュートン（1642−1727）が示した．また，トーラス（ドーナツまたは浮き輪）の回転軸に平行な面で切断すると，その断面がカッシーニの卵形線となるなど興味のある性質がある．

3. 卵の形もいろいろ

生物学上は，卵（らん）は卵細胞をいうが，普通はそのうち体外に産み出されたものをいう．細胞質中に栄養物質である卵黄を含み，そのまわりは卵白などさまざまな物質で覆われる．卵の大きさはジンベイザメで68cm × 40cm，ダチョウで16cm × 12cm，ハチドリの一種では1.2cm × 0.8cmなどである．（私は2005年度にケンブリッジに留学する機会を得た．休日を利用してロンドンの自然史博物館を訪れたとき鳥類の卵の大小を見ることが出来た．）卵の形に注目して分類してみると卵形，洋梨形，円形，楕円形の4つに分かれる（図7）．

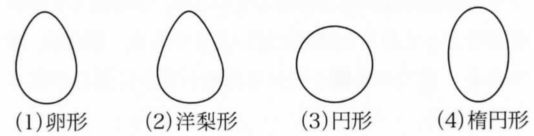


図7　形の分類（『鳥類の図鑑』（小学館）P.158より）

卵形の代表はニワトリの卵である．洋梨形はウミガラスやウミスズメなど海鳥に多く，卵形より尖端と鈍端の差が大きい．円形はウミガメ，楕円形はダチョウに代表される．

ニワトリは今では平坦な場所に卵を産むので転がって割れる心配をしなくてよいのだが，卵形になっている．親鳥が卵をだいて暖めるとき，転がって遠くに行かず円弧を描いて戻ってくるために卵形なのだろうか．ウミガメは砂浜に卵を産み，ダチョウは草原に卵を産み，どちらも平坦な場所なので転がる心配をしなくてすむので円形や楕円形であることが理解できる．ウミガラスやウミスズメは狭い岩棚に卵を産む．岩棚は傾斜していることが多いので，洋梨形である理由もうなずける．海鳥でもカモメやカツオドリはこの形をしていないため，転がる心配があるので巣をつくっている．このように考えてみると，なるほど卵が卵形である理由も理解できるのである．

4. ダーウィンの進化論

卵（たまご）はどの時点で卵形になったのだろうか．卵の形は最初から決まっていたのか，それとも後から決まったのだろうか．

ダーウィンの進化論というのがある．自然淘汰説または自然選択説ともいう．進化の要因論としてダーウィンとウォーレスが同時平行的に到達した説で，生物は原則として多産性で，そのために起こる生存競争の結果，環境により適応した変異個体が生存し，その変異を子孫に伝える．このため生物は次第に環境に適応した方向に向かって進化するという考えである．ダーウィンはこの説を『種の起原』において本格的に論じ，それによって進化論は広く認知された．20世紀に入っても現代の進化論の中心的な位置を占めている．『種の起

原』は岩波文庫に収録されているので一読をすすめる．

卵の形はつぎに示すように，ダーウィンの進化論を裏付ける材料のように思える．ここに卵の構造を示す（図8）．卵は卵のからである卵殻（らんかく），卵を割ると通称しろみの卵白（らんぱく），通称きみの卵黄（らんおう），卵黄を固定するカラザ，鳥のからだのもとになる胚盤，気室，卵殻膜などで構成される．意外なことに，ニワトリの卵殻は確かに卵形をしているが，卵を割って中の卵黄をとってみると球形に近いことである．卵黄は，球である．重力の影響を受けるためわずかに歪むが基本は球である．

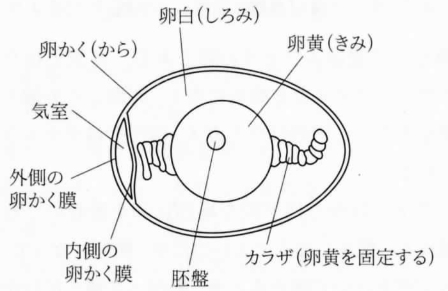


図8　卵の構造　（『鳥類の図鑑』（小学館）P.160 より）

皆さんは，鶏肉店の店頭にときおり「玉ヒモ」として売られている，ニワトリの卵巣と輪卵管をご存知であろうか（図9）．卵や鶏肉以外に，この臓物が売りに出されていることがある．「玉ヒモ」の玉はニワトリの卵巣であり，ヒモはニワトリの輸卵管である．卵を産まなくなったニワトリを鶏肉にするとともに，臓物である玉ヒモも昔は栄養があるといって結構，重宝にされた．にわとりは1日に1個の卵を産むが，これから産もうとする卵の生成過程を一度に見ることができる．

卵巣にはぶどうの房のように多くの小さな卵黄があるが，どれも球に近い形をしている．十分に大きくなった卵黄はろう斗部から輸卵管に入り，たんぱく質の分泌を受けながら卵白と卵殻膜（いわゆる「うす皮」）を形成していく．子宮部では石灰質の沈着により卵殻（から）が形成される．ろう斗部から輸卵管を経て放卵されるまでの時間は約24～27時間であり，輸卵管の全長は70～75 cmである．

卵殻の形が決まるのは排泄する瞬間ではなく，19～20時間滞留する子宮部で決まる．子宮部では飼料中のカルシウムが卵殻の形成に関わる．カルシウムが不足すると卵殻が薄くなる．卵巣での卵黄は球であるが，排泄部での卵殻は球のままであったり，楕円形になったり，卵形になったり，洋梨形になったりするのである．

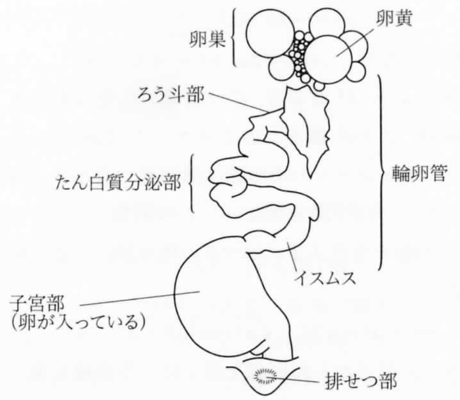


図9　卵巣と輸卵管（斎藤昌蔵『にわとりと卵』（同和春秋社）より）

岩棚に産み落とされた卵が円形や楕円形であれば転がり割れてしまい，その種は滅びたであろう．産み落とされた卵が偶然にも卵形や洋梨形であったため転がらず，その種は保存されたのであろう．このように考えると，卵巣から排せつ部まではわずか数十センチメートルの距離であるが，この距離には始祖鳥（ジュラ紀）以来の進化の歴史が集約されているように思える．

5．卵形の応用

鳥類の卵は転がらずに割れない，親鳥の元に戻ってくるという生物学上のすぐれた性質を持っていることを説明してきたが，卵形は生物だけでなく，私たちの日常にも応用する試みがある．インターネットで「卵形」をキーワードに検索してみると，面白いホームページに出会う．

卵形をした汚泥消化槽がある．従来の円筒形消化槽と比較して，水密性，気密性に優れていると説明している．卵形の側溝というのがある．流水断面が卵形なので，排水性が良好だという．卵形の自動車のボディがある．車の前方を卵の尖端に後方を卵の鈍端に対応させ流線型を発展させている．

卵形の携帯電話がある．実際は卵形ではなく楕円であるが，これも卵が意識されている．卵形スピーカーがある．スピーカー内部で発生する様々な振動や反射音を抑えるため，卵形で原音再生を追及したと説明している．他にアイデア商品として卵形冷蔵庫，卵形洗濯機などがある．これらのすべてが科学的に証明されたわけではないが，卵形は生物だけでなく，私たちの生活の中にも大きく影響しているように思える．

参考文献

(1) 西山豊『卵はなぜ卵形か』（日本評論社, 1986年）p11～p26

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

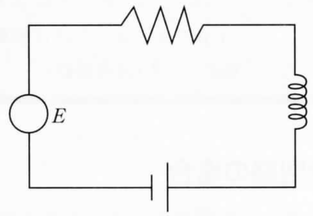
自然科学の華
微分方程式
第11回

電流回路の中の微分方程式

清　史弘

1．物理法則の確認

次の図のような回路1における電流，あるいは電圧の時間に対する変化を考えてみることにします．

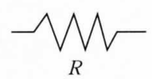


回路1

私は物理の専門家ではないので，この中で支配する物理法則を簡単に結果だけ述べておきます．今月号では，t は時間を表し，$V=V(t)$ は電圧，$I=I(t)$ は回路に流れる電流を表すものとします．

（i）抵抗

抵抗 $R(\Omega)$ にかかる電圧と流れる電流には

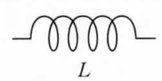


$$V=RI$$

の関係が成り立ちます．いわゆるオームの法則です．

（ii）コイル

コイルには電流の変化に比例して変化を妨げる向きに電圧が発生します．すなわち，

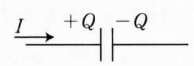


$$V=L\frac{dI}{dt}$$

で定まる V が発生します．L は自己インダクタンスと呼ばれる正の定数（単位は H（ヘンリー））で，コイルを入れることによって，起電力 $-L\dfrac{dI}{dt}$ の電池を入れるのと同じです．

（iii）コンデンサー

電流の向きに対し，図のようにコンデンサにたまる電気量 QC（クーロン）とすると Q は比例定数，C（単位は F（ファラッド））を用いて



$$Q=CV$$

と表せます．ここで，コンデンサーにたまる電気量の変化が電流であることを考えると

$$\frac{dQ}{dt}=I$$

であるので，コンデンサーにおける電圧と電流の関係は

$$\int I\,dt=CV$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{C}\int I\,dt$$

が成り立ちます．

以上より回路1における起電力を E とおくと

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I\,dt=E \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立ちます．

2．2階の微分方程式に関する準備

y を x の2回微分可能な関数とし，この y が微分方程式

$$y''+py'+qy=0 \qquad \cdots\cdots②$$

（p, q は定数）を満たしているとします．このとき，②に対して次のような2次方程式を考えます．

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \qquad \cdots\cdots③$$