

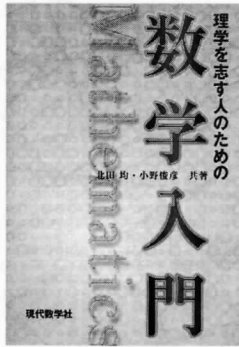
理学を志す人のための

数学入門

北田 均・小野俊彦 共著

A5判/500頁/定価3,360円

本書は数学において大学初学年に学ぶべき事柄をほぼ網羅するもので、座右の書としてはもちろん教科書として使用できるように配慮されている。また、近年多く見られる安易な入門書ではなく、数学の論理性を明確に示



すことがこの本の最大の目的とされる。はじめ線型代数について平易に解きほぐし、その後の抽象的な展開への入り口としている。この上で、論理学の初歩とともにゲーデルの不完全性定理の証明を見、順序数の概念を導入した後に実数の連続性について詳しく調べ、位相と距離の概念にまで至る。このように数学が前提としているものの全貌をみることができるものは他に例がなく、画期的なものである。さらに、解析学の基礎となるバナッハ空間上での微分の導入、リーマン積分の構成を行い、最後にはルベグ積分の入門までできるようになっている。この書を通じて、様々な数学の場面で自己言及が重要な役割を果たしていることにも気づかされるだろう。

ISBN4-7687-0358-5

【内容】

- 第I部 線型代数入門 第1章 自然現象と線型現象 第2章 行列と線型写像 第3章 行列式 第4章 内積と計量 第5章 ジョルダン標準形
- 第II部 数学の基礎 第6章 数学の論理 第7章 集合と自然数 第8章 順序数と濃度 第9章 実数 第10章 実数の連続性 第11章 距離空間
- 第III部 解析学入門 第12章 一変数実数値関数とその例 第13章 バナッハ空間における微分 第14章 リーマン積分 第15章 ルベグ積分 第16章 循環の意味するもの

現代数学社

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^m \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum_{k=m+1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

と分けて書くと、特に $1 \leq i, j \leq m$ のときは右辺第1項の添え字は1から m までしかとらない、すなわち e_1, \dots, e_m のみから決まる量であるから右辺第1項は内在的です。一方右辺第2項に含まれる ω_i^k, ω_k^j は法ベクトル e_{m+1}, \dots, e_n を用いるから外来的です。しかし第2項全体では(左辺 - 右辺第1項が内在的だから)内在的です。そこでこの部分を

$$\Omega_i^j = \sum_{k=m+1}^n \omega_i^k \wedge \omega_k^j \quad (18)$$

とおいて曲率と呼びます。

より一般に、 M 上のベクトル場 X に対してその外微分 dX は e_1, \dots, e_n で張られるからそれを接ベクトル成分と法ベクトル成分に分けて

$$dX = \nabla X + A_X$$

$$\nabla X \equiv \sum_{i=1}^m a^i e_i, \quad A_X \equiv \sum_{i=m+1}^n b^i e_i$$

と書きましょう。 dX が1次微分形式なので各 a^i もそうであり、よって M の座標を (x_1, \dots, x_m) とするとき

$$a^i = a_1^i dx_1 + a_2^i dx_2 + \dots + a_m^i dx_m$$

と表すことができます。これを m 次元ベクトルと同一視して $a^i = (a_1^i, \dots, a_m^i)$ と書くと、 (x_1, \dots, x_m) 座標で成分表示した M のベクトル場 $Y = (y_1, \dots, y_m)$ と各 a^i との内積を考えることができます。この意味における ∇X と Y の内積を $\nabla_Y X$ と書くと、内積の意味から $\nabla_Y X$ は ∇X の Y 方向成分ですから、微分の意味を考えれば、 $\nabla_Y X$ は“ベクトル場 Y 方向に沿ったベクトル場 X の変化率”を表す量であることが分かります。この X から ∇X への対応 ∇ をレヴィ-チビタ接続といて領域の曲がり具合を記述するための重要な作用素です。

方程式

$$\nabla_X X = 0 \quad (19)$$

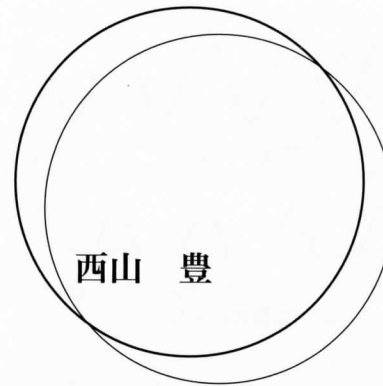
は“ベクトル場 X は自分自身に沿って曲がらない(左右に振れない)”ことを意味し、実際この方程式は測地線方程式といって M 上の2点を結ぶ最短曲線を求めるための微分方程式であることが知られています。

補足, 問の解答, モニターの声, 次回予告等はこちら。



<http://www.geocities.jp/ruy406/>

(ちば はやと / 京都大学)



西山 豊

数学を楽しむ

扇風機の数理

1. 扇風機が逆に回って見える

最近ではエアコンが普及して扇風機を見る機会が少なくなった。それでもときどき、扇風機についての質問を受けることがある。扇風機は逆に回って見えることがあります。どうしてですかと。私は約30年前に「扇風機にひそむ数理」というエッセイを書いた。扇風機が逆に回って見える理由がわかれば、その原理を応用して扇風機の回転速度を推定できるというものがあった。環境もだいぶ変わっているので、このときまとめたものを補足する形で以下その理由を説明している。

扇風機の羽根は3枚または4枚のものがあるが、ここでは3枚としよう。扇風機に電源を入れるとモーターは右回転でまわります。回転の速度が増すにつれて扇風機の実際の回転とは違った回転を見ることができ。実際の回転よりは遅くて右回転している状態、止まって見える状態、モーターの回転とは反対の左回転をしている状態の3通りだ。これを仮想回転とよび、順行、停止、逆行ということにしよう(図1)。

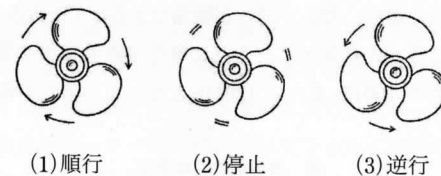


図1 3つの仮想回転

これらの現象はストロボ効果という用語ですべてが説明できる。ストロボとはストロボ・ライトの略で写真撮影用の閃光装置のことをいう。扇風機を蛍光灯や電灯の断続的な光の下で見ると、こういう現象が起こ

るのである。扇風機を屋外に持ち出し、太陽の連続的な光の下で見たら仮想回転を見ることはできない。もちろん、このような馬鹿げた実験をするのは私ぐらいだろうが。

蛍光灯や電灯の明かりは交流電源でもとされる。直流の場合は電流が一定であるから灯も一定であるが、交流の場合はsin波が示すように1秒間に50ないし60回の周期を持つ波であるから電流が一定でなく、灯も断続的である。ただし、人間の認識できる映像のコマは1秒間に10枚程度であるといわれるから、電灯が断続的に点滅しているとは感じないのである。

この断続的な光のもとで扇風機を見た場合どうなるのか、その模式図を図2に示そう。

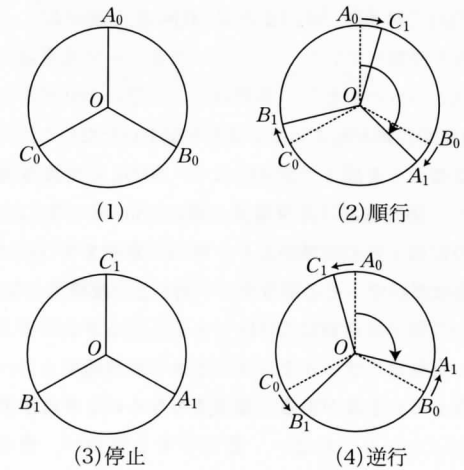


図2 実回転と仮想回転

3枚の羽根を A, B, C とし、最初の羽根の位置が OA_0, OB_0, OC_0 であったとする(図2(1))。電灯がつぎに光るとき、羽根が120度近く回転して

OA_1, OB_1, OC_1 の位置まで進んだとしよう。このとき私たちの目に映るのは、 OA_0 が OA_1 に、 OB_0 が OB_1 に、 OC_0 が OC_1 に移動したと理解するのではなく、前に見た羽根の位置ともっとも近いものを元の羽根と錯覚して見るのである。つまり、私たちの目には、 OA_0 が OC_1 に、 OB_0 が OA_1 に、 OC_0 が OB_1 に移動したと見るのである。

電灯の点滅する1周期の間に扇風機の回転が120度よりわずかに進んでいたときは順行、120度ちょうどときは停止、120度より少ないときは逆行の仮想回転が見えるのである(図2(2)~(4))。

2. 交流電流と整流

さて、蛍光灯や電灯が点滅する頻度はどの程度であろうか。ご存知のように交流周波数は西日本では60Hz、東日本では50Hzである。せまい日本になぜこの2つが存在するのだろうか。

明治維新はまだ幕末の対立関係が続いていて、それぞれの派閥が関係の深い外国の発動機を購入した。東京電燈(現在の東京電力)は1895年にドイツのアルゲネ社製50Hzの、大阪電燈は1897年にアメリカのGE社製の60Hzの交流発電機を導入し、それが東日本では50Hz、西日本では60Hzのものを採用するようになった始まりだ。周波数を何度か統一する機会があったが、統一されないまま現在に至っている。

私は、交流周波数が50Hzまたは60Hzであるから、電灯は1秒間に60回または50回の点滅が起こっていると理解していた。ところが読者から交流電流には整流というのがあり、実際はこの2倍の100回または120回の点滅が起こっていると手紙をいただいた。

このことを図3で説明しよう。50Hzの交流電流がある。交流電流は直流電流と違い、Sin波で表される。正の領域と負の領域があり、電流が意味を持つのは正の領域だけで、その部分を取り出すと半波整流となる。この段階では点滅は50Hzである。明るさを必要としない自転車のテールランプなどは半波整流でよい、と説明している本がある。戦後まもなくのときは半波整流だったかもしれない。整流子を2個使い、負の領域の電流の向きを変えて両波整流すると点滅の周期は100Hzとなる。現在のほとんどの電灯は両波整流である。

このように電灯の点滅は100Hzまたは120Hzであるので、電灯の下で扇風機を見たところで最初に説明

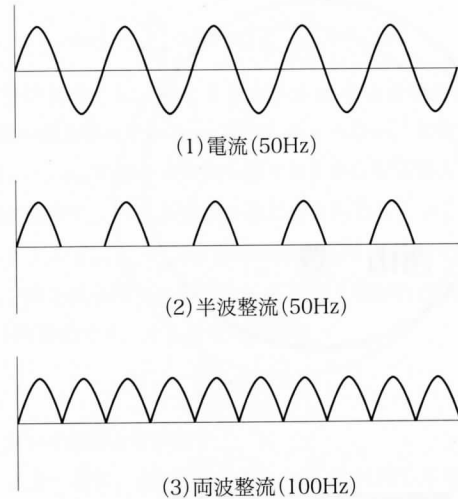


図3 整流

した扇風機の仮想回転を見ることは難しい。そこで、実際にどうすれば仮想回転を見ることができようかを説明していこう。そのためには扇風機の規格について説明する必要がある。

私はある電機会社の扇風機事業部に研究目的だと断って扇風機の回転数を教えて欲しいと手紙を書いたことがある。いまでも、この回転数は大きくは変わっていないと思う。ある扇風機の回転数は西日本60Hzでは微風が720回転/分、涼風が1040回転/分、強風が1390回転/分の3段階とあった。

モーターの回転数は1分間を基準にすることが多いが、電灯の周波数は1秒間を基準になっているので、こちらも1秒間を基準にして計算しなおしておく。これで行くと、微風は12回転/秒、涼風は17.3回転/秒、強風は23.2回転/秒となる。平均して約20回転/秒になる。3枚羽の扇風機を点滅の周期が60Hzで見るとするなら、1/60秒の間におよそ120度回転している計算になる。つまり扇風機が強風になる前後に、仮想回転の順行、停止や逆行が観測できるはずである。

ところが先に説明したように電灯は両波整流の関係で周期が100Hzまたは120Hzとなっているため観測は難しい。

表 扇風機の回転速度

	50Hz	60Hz
微風	800(13.3)	720(12.0)
涼風	1050(17.5)	1040(17.3)
強風	1280(21.3)	1390(23.2)

単位: 回転/分、()内は回転/秒

では、どうすればよいのか。蛍光灯や電灯をあきら

めテレビを利用する。ブラウン管方式のテレビでは走査線といって1秒間に30コマの画像が送り出されてくる。30Hzは蛍光灯より小さい周波数である。テレビ画像の前で手を振ってみると手がちらついて見える。テレビが1秒間に30回の断続的な映像を送っているためだ。

ブラウン管方式のテレビは525本の走査線があり、左上端から右下端までを1秒間に30回描くようになっている。この走査方式ではテレビ画像がちらつき人間の目によくないということで、現在は奇数行を60Hzで走査し、偶数行を60Hzで走査するというインターレース(飛び越し走査)方式がとられている。またテレビ画像はブラウン管方式から液晶画面やプラズマ画面になり、このような現象が見られるかどうかかわからない。ということでますます、扇風機が逆に回って見える環境が少なくなってきたのも事実である。

3. 映画の中の扇風機

ところが最近、つぎのような質問を受けた。電灯の下でなく昼間でも扇風機が逆に回って見えることがあるので、ストロボ効果が逆にまわる理由でないというのだ。

この場合、2つのことが考えられる。実際に太陽光のもとで逆回転しているのを見たか、それともテレビ画像または映画の1シーンとして見たのかだ。後者の場合、TVあるいは映画のフィルムは連続的なものではなく、1秒間に何コマかの静止画が記録され、それがストロボ効果となっている。映画は1秒間に24コマ、テレビは30コマである。

映画が24コマになるまでには歴史がある。映画の描写速度は人間の残像の視覚特性から経験的に求められてきた。最初は10コマ/秒だったが、動きが滑らかでないため16コマ/秒になる。コマが少ないのはフィルムが非常に高価なもので消費量を抑えなかったためである。またフィルムは可燃物であるので、コマ数を増やして高速に回すと火災事故が発生しやすかったこともある。トーキーの時代になってフィルムの端に音を記録するようになると16コマ/秒では音がギクシャクするので、最終的に24コマ/秒になり、これが世界標準になっている。

24コマ/秒の映画や30コマ/秒のテレビで撮影された扇風機を見るとどうなるのだろうか。それは蛍光灯や電灯のストロボ効果で説明したように、1秒間に

24コマまたは30コマの断続的な映像を見ていることになり、同じ現象がおこる。映画やテレビの場合は電灯に比べて周波数が小さいため仮想回転を見ることが容易である。戦前の白黒映画の扇風機、西部劇に出てくる幌馬車の車輪、ヘリコプターの翼、テレビのコマーシャルで映し出される自動車のホイール、これらが逆回転しているのを見た人は多いと思う。

4. 扇風機の回転数を推論する

以上のことを、数式を使って説明してみよう。ストロボの周波数を n_1 (Hz)、扇風機の周波数を n_2 (Hz)とする。どちらも周期的な関数なのでSin波であらわすと、時刻を t ($0 \leq t \leq 1$)として

$$y_1(t) = \sin 2\pi n_1 t \quad (1)$$

$$y_2(t) = \sin 2\pi n_2 t \quad (2)$$

となる。このとき観測される仮想回転の周波数 n_3 (Hz)は $n_3 = n_2 - n_1$ の関係があり、次式となる。

$$y_3(t) = \sin 2\pi(n_2 - n_1)t \quad (3)$$

具体的な例として、10回/秒で点灯するストロボ灯で9回/秒で回転する羽根を見ると1回/秒で逆回転する仮想回転を見ることがになる。数値でいうと $n_1 = 10$ 、 $n_2 = 9$ 、 $n_3 = 9 - 10 = -1$ であり、この概略を図4に示す。

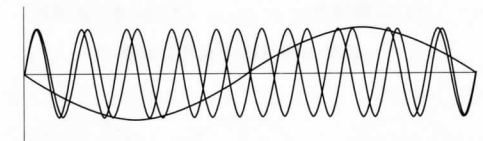


図4 回転体とストロボ灯の関係

同様にして100Hzで回転するプロペラに100Hzの光源をあてるとプロペラは停止しているように観察できるはずである。99Hzの光源をあてると回転方向と同じ順行で1Hzのゆっくりした仮想回転が、101Hzの光源をあてると逆方向でゆっくりした仮想回転が見えることになる。映画などでヘリコプターのローターがゆっくり回転しているように見えるのは、映画のコマ数の倍数とプロペラの回転数がほぼ一致しているからである。

テレビ画面の前に扇風機を置いて扇風機を見ることとしよう。テレビの受信機は30Hz、つまり1秒間に30回の断続的な光が出ている。1/30秒後に羽根が1/3回転、2/3回転、1回転していれば扇風機はあたかも停止しているように見える。1秒間に換算すると

30/3 = 10 回転, 30 × 2/3 = 20 回転, 30 × 1 = 30 回転の速度で回っているときである。

実回転速度を n_1 回転/秒, 仮想回転速度を n_2 回転/秒とすると, つぎの関係がある。

$$n_2 = f(n_1) = n_1 - 10i$$

$$(10i - 5 \leq n_1 < 10i + 5, i = 0, 1, \dots, m)$$

図5(1)の直線関数が示すように扇風機の回転速度に比例した回転運動が観測されるはずだが, 同図(2)の「のこぎり刃関数」が示すように, 回転速度の範囲は ±5 回転/秒が上限と下限の仮想回転が観測される。 $n_2 < 0$ のとき逆行, $n_2 = 0$ のとき停止, $n_2 > 0$ のとき順行で, これが繰り返される。

また, 扇風機は3枚羽であるが, 羽根の位置によっては6枚羽や9枚羽の3の倍数の羽根を観測することもある(図6)。実際は細かい12枚羽を見ることがよくある。以上の知識を駆使すれば, 仮想回転から扇風機の実際の回転速度を推定することも可能である。

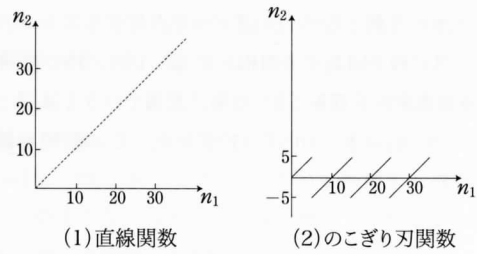


図5 実回転数と仮想回転数



図6 倍数羽の発生

5. ストロボスコープの応用

扇風機が逆に回って見えるのはストロボ効果によると説明したが, この原理を応用したものにストロボスコープがある。その例をいくつか紹介しよう。

図7はアナログプレーヤー全盛の時代に活躍した回転速度の調節シートである。今はCDプレーヤーが全盛で若い世代には馴染まないが, プレーヤーの回転速度は33 1/3 回転/分と45 回転/分のものがあり, 交流電流が50Hzと60Hzの地域別にパターンが用意されていた。私のアナログプレーヤーもどこかに行ってしまう確

かめることができないが, 昔の電灯下では, 確かに正しい回転数のとき模様が停止して見えたのである。

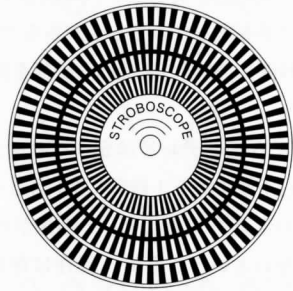


図7 回転速度を調整するシート

工業用に使われているものとして非接触式の数値計がある。速度計には接触式と非接触式があり, 非接触式にストロボ効果が応用されている。

回転体に反射テープを貼り付けて, 赤色LED可視光線を反射させて読み取ることにより, 測定物に接触せずに回転体の回転数を測定することができる。ある製品の詳細仕様によれば, 測定が1~99999 回転/分で精度は±0.02%で, かなり精度がいいとある。そして3Vの電圧で強力なキセノンフラッシュランプの断続する光を出すことになっている。測定は, フラッシュする速度を調整することによって, 測定物が停止しているように見えたとき値を読み取ることになっている。測定対象はモーターなど高速で回転するものに使われる。

ストロボスコープは医療用の機器にも応用されている。声帯粘膜は, 発声時に100~300Hzの周期で振動するが, 声帯疾患の発声時の微細な診断には測定が不可欠である。内視鏡にCCDカメラ等の映像機器を取りつけることで, 映像による患部の確認が可能である。

その他, 超高速で運動する分子を, レーザー光を用いたストロボスコープの方法で観察する装置もある。このようにストロボ効果は多岐に 응용されているが, その原理は最初に説明したように, 扇風機が逆に回って見えるという現象にすべてが関係している。

参考文献

- (1) 西山豊「扇風機にひそむ数理」『卵はなぜ卵形か』(日本評論社, 1986年)p11~p26

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

最新の良問を楽しもう

有限集合, 確率

名倉嘉尊

1. 有限集合

1.1 集合算の便利さ

有限集合としての全体集合を U とし, U の部分集合 A の U に関する補集合を \bar{A} と表すとき, U の部分集合 A, B の共通部分 $A \cap B$ や和集合 $A \cup B$ の補集合に関して基本になるものは,

(i) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
というド・モルガンの法則である。

また, 全体集合 U の部分集合 A の要素の個数を n_A と表すことにすれば, 要素の個数については次のような公式が基本になる。

(ii) $n_{\bar{A}} = n_U - n_A$

(iii) $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$

(iv) $n_{A \cap \bar{B}} = n_A - n_{A \cap B}$

たとえば, (iii)に因む公式として, 3個の集合 A, B, C に対するものは次のようになる。

$$n_{A \cup B \cup C} = n_A + n_B + n_C$$

$$(v) \quad -n_{B \cap C} - n_{C \cap A} - n_{A \cap B} + n_{A \cap B \cap C}$$

特に (iii), (iv), (v) の右辺には記号 \cup がなく, \cap だけが登場している。

だから, \cup や \bar{A} などと表された問題が与えられても, \cap で表される集合についての情報だけを準備して

おけば充分であるということがわかる。

まずこのことに関連する問題を解くことにしよう。

問 1.1 1から777までの自然数のうち, 2の倍数の集合を A , 3の倍数の集合を B , 5の倍数の集合を C , 7の倍数の集合を D とする。このとき次の集合の要素の個数を求めよ。

(ア) $B \cup C \cup D$ (イ) $A \cap C \cap \bar{D}$

(ウ) $\overline{A \cap B \cup C}$ (エ) $\overline{A \cup B} \cap D$

(オ) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

【解】 上記で述べたように, まず \cap だけで結ばれる集合の要素の個数を準備しよう。

777を2で割れば, 余りは出るが, 商(正確には部分商という)は388であるから, 上記の記号では $n_A = 388$ となる。当然 $n_U = 777$ とする。

同様に777を3, 5, 7で割ったときの商から次のようになる。

$$n_B = 259, n_C = 155, n_D = 111.$$

また, $A \cap B$ は2と3の共通の倍数としての 2×3 の倍数の集合である。同様のことを考え, 777を $2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, 3 \times 5, 3 \times 7, 5 \times 7$ で割ったときの商を考えれば, 次のようになる。

$$n_{A \cap B} = 129, n_{A \cap C} = 77, n_{A \cap D} = 55,$$

$$n_{B \cap C} = 51, n_{B \cap D} = 37, n_{C \cap D} = 22.$$

また, 777を $3 \times 5 \times 7, 2 \times 5 \times 7, 2 \times 3 \times 7, 2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 5 \times 7$ で割ったときの商から次のようになる。

$$n_{B \cap C \cap D} = 7, n_{A \cap C \cap D} = 11, n_{A \cap B \cap D} = 18,$$

$$n_{A \cap B \cap C} = 25, n_{A \cap B \cap C \cap D} = 3$$

これだけのデータを準備しておけば, (ア)から(オ)までのすべての値を求めることができる。

まず(ア)については, 公式(v)を使って次のようになる。

$$n_{B \cup C \cup D} = n_B + n_C + n_D$$

$$- n_{C \cap D} - n_{B \cap D} - n_{B \cap C} + n_{B \cap C \cap D}$$

$$= 259 + 155 + 111 - 22 - 37 - 51 + 7$$

$$= \boxed{422} \quad \dots\dots\dots \text{(ア)の答}$$

(イ)については公式(iv)を使うことができ, 次のようになる。

$$n_{A \cap C \cap \bar{D}} = n_{A \cap C} - n_{A \cap C \cap D}$$

$$= 77 - 11 = \boxed{66} \quad \dots\dots\dots \text{(イ)の答}$$

(ウ)については補集合を考えて, ド・モルガンの法則