数学を楽しむ

回文数と 196

西山　豊

1. 回文数(palindrome number)

回文というのがある．これは「タケヤブヤケタ」や「ウツイケンシハシンケイツウ」などのように前から読んでも後ろから読んでも同じになる文のことである．「ナカキヨノトオノネフリノミナメサメナミノリフネノオトノヨキカナ」(長き夜の　遠の眠りの　皆目覚め　波乗り船の　音の良きかな)のように回文を短歌に読み込んだすぐれた文学作品もある．

数字についても回文のような数字がある．たとえば 727, 1991, 38483 などは前から読んでも後ろから読んでも同じである．このように対称になっている数字のことを回文数という．英語では回文を palindrome，回文数を palindrome number と言う．

さて，ここに任意の数字がある．この数字を逆に並べた数をもとの数に足す．この操作を繰り返すといずれは回文数に到達するという．たとえば，59 としよう．

$59 + 95 = 154,\ 154 + 451 = 605,\ 605 + 506 = 1111$

また別の数字 183 で試してみよう．

$183 + 381 = 564,\ 564 + 465 = 1029,$

$1029 + 9201 = 10230,\ 10230 + 3201 = 13431$

59 は 3 回の操作で回文数 1111 に到達し，183 は 4 回の操作で回文数 13431 に到達した．読者は，他の数で試してください．

ほとんどすべての数はこの操作で回文数に到達するが，196 から始めると回文数に到達しない．回文数になるのか，ならないのかもわかっていない．この問題は古くて新しい問題である．サイエンティフィック・アメリカン誌に掲載されたこともあり，私はそのとき関心がなかったが，今回はちょっと調べてみる気になった．

2. 2 桁の数はすべて回文数となる．

まず，手始めに 2 桁の数から試してみよう．10 から 99 までの 2 桁の数について，どの数から始めても回文数になることが確かめられる．ただし，89 から始めた場合は，なかなか回文数にならないが，24 回の繰り返し計算で初めてつぎの 13 桁の回文数に到達する．

8813200023188

2 桁の数がすべて回文数になることを，しらみつぶしに調べるのはあまり数学的でない．ある桁に注目して足した合計が各桁とも 9 以下であるとすべて回文数になる．たとえば，35 のように $3 + 5 = 8$ で 9 以下になるときは，調べる必要がない．

2 桁の数は 10 から 99 までの 90 個ある．そこで 2 桁の数を ab ($1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9$) とする．

(1) 1 の位が 0 のときはすべて回文数になり，このような数は 9 個ある．

(2) 1 の位と 10 の位が同じときは，すでに回文数であり，このような数は 9 個ある．

(3) 1 の位と 10 の位が対称になっているときは調べる必要がない．このような数は 36 個ある．

(4) 1 の位と 10 の位の合計が 9 以下のときは足し算で桁上がりがしないので回文数になり，このような数は 16 個ある．

(5) 1 の位と 10 の位の合計が 10 以上で 13 以下のときは 3 桁の数となる．この数を abc とすると，各桁のすべてが 4 以下であるので次の段階で確実に回文数となる．このような数は 14 個ある．

(6) 1 の位と 10 の位の合計が 14 になる数は 59 と 68 があるが，$59 + 95 = 154$，$68 + 86 = 154$ となるので，どちらか一方を調べればよい．同様に 1 の位と 10 の位の合計が 15 になるのは 69 と 78 があるが，$69 + 96 = 165$，$78 + 87 = 165$ となるので，どちらか一方を調べればよい．

以上の結果より，

$90 - 9 - 9 - 36 - 16 - 14 - 2 = 4$ のように，調べる数はつぎの 4 個だけでよいことになる．

59, 69, 79, 89

また，これらを作図すればつぎのようになる．4 個の数は図 1 では右端の列で下側に位置する．回文数になりにくい数は 1 の位と 10 の位が 9 に近く，89 が回文数になりにくい数であることも予想できる．

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

図 1．2 桁の数の証明

3. 3 桁の数の 196 と 879

つぎに 3 桁の数について考えてみよう．3 桁の場合も先に説明した 2 桁と同様な方法が考えられるが，桁数が増えるにつれてしぼり込みの度合いが悪くなる．そして，3 桁の数 100 から 999 までの 900 個の数のうち，つぎの 13 個は現在のところ回文数にならないことが知られている．

196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788,
790, 879, 887, 978, 986

これらのうちで回文数にならない最初の数は 196 であるから，196 問題ともよばれている．私は，この問題に興味を持って調べ始めたが，3 桁になるとプログラムの力を借りなければならなくなった．表 1 は 3 桁の数が回文数になるための繰り返し計算の回数である．

900 個の数のうち 90 個はすでに回文数であるから検査の必要はない．残る 810 個の数が回文数に到達する経過を調べると，1 回で回文数に到達するのが 213 個，2 回は 281 個，3 回は 145 個と意外と早く回文数に到達することがわかった．最も遅いのは 23 回で，その数は 7 個あった．そして先にあげた 13 個は回文数にならなかった．

操作回数	度数	比率
0	90	10.0%
1	213	23.7%
2	281	31.2%
3	145	16.1%
4	63	7.0%
5	31	3.4%
6	9	1.0%
7	17	1.9%
8	7	0.8%
10	2	0.2%
11	7	0.8%
14	2	0.2%
15	7	0.8%
17	4	0.4%
22	2	0.2%
23	7	0.8%
100 以上	13	1.4%
合計	900	100%

表 1．回文数になるための計算回数(3 桁の数)

3 桁の数で回文数にならない 13 個の数は 2 つのグループにわけることができる．196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 887, 986 と 879, 978 のグループである．これらは図 2 に系統図を示したが，196 または 879 が種(Seed)とよばれるもので，それ以外は派生した数であることがわかる．その理由は，691 は 196 を逆に並べた数であるので同じ系列に入る（$196 + 691 = 691 + 196 = 887$）．また，295 と 592 は 1 回の繰り返し計算後は 196 と同じ値の 887 になるので同じ系列に入る($295 + 592 = 196 + 691 = 887$)．

この 2 つのグループは別々の系列なのか，無限のかなたで同じ系列になるのかはわかっていない．

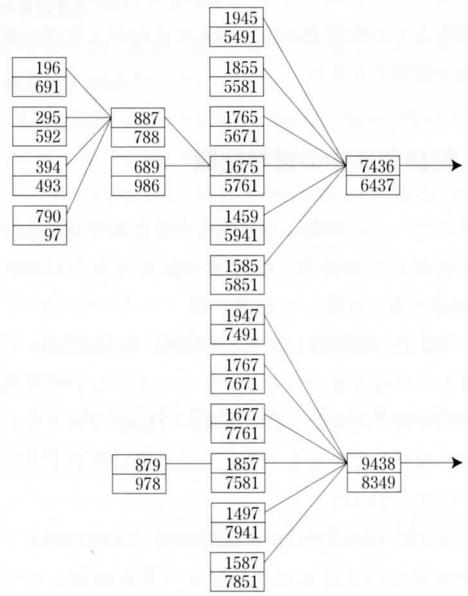

図 2．未解決の 13 個(3 桁の数)の系統図

4. 196 問題のルーツ

この回文数の 196 問題はいつごろから話題になっているのだろうか．日本で紹介されている文献として，アシモフ著『アシモフの雑学コレクション』(1986 年)の中に 196 の説明がある[1]．この訳本の原著は 1979 年であるから，欧米ではかなり前から話題になっていることがわかる[2]．また，この時期にはサイエンティフィック・アメリカン誌に M. ガードナーなどが何度かこの話題を取り上げている．

そこでアシモフが最初に言い出したのかと思って調べてみた．この原稿を書いている時はケンブリッジに留学中であったので図書館で貴重な資料を入手することができた．それによると 1967 年に C.W. トリグがマセマティクス・マガジンに 196 問題をすでに取り上げている[3]．また，これより遡り 1938 年に D. レーマーがブリュッセルの雑誌スフィンクスに 196 問題をとりあげ，73 回計算を繰り返したが回文数に達しないとしている[4]．これより遡ることができるかもしれないが資料が存在しなかった．

回文のことを英語では Palindrome という．この言葉は 17 世紀はじめ，ギリシャからの外来語であるという．デカルトやニュートンが活躍したのは 17 ～ 18 世紀であり，文献で確認できないがもしかしたらこの頃から 196 問題が数学者の中で話題になっていたのかもしれない．それにしても 196 問題は 1938 年から約 70 年間も多くの数学者が取り組んできたが，生きの長い未解決問題でもある．

5. 記録更新中の世界記録

そこで，この問題に取り組んできた数学者たちの記録をたどってみよう．1938 年，D. レーマーは 196 を 73 回繰り返し計算して 35 桁の数

45747 6603920132 8565933091 8416673654

に達したが回文数ではなかったという．これが当時の最大の記録であった．私は Visual Basic プログラムで計算しなおしてみたところ，この数字は次のようにわずかに違っていた．

45747 6591819132 8565933092 7106673654

1938 年といえばまだコンピュータが出現していない．この雑誌の裏表紙には卓上計算機（キャッシュレジスター）の広告が載っていた．あつかえる数の桁は 12 桁までである．当時の数学者は 12 桁しか計算できない道具を使って 196 問題に取り組んでいたのだ！

1967 年，C.W. トリグは，3556 回計算を繰り返して 1700 桁の数に達したが回文数になっていないのを確認している．使われたのは IBM1401 という当時では最新のコンピュータである．

最近になってからのデータは，1990 年，J. ウォーカーは 2,415,836 回繰り返して 1,000,000 桁の数になったが回文数ではなかったとしている．このとき 100 万桁を超えている．数字が大きくなるので，ここで 100 万を 1 ミリオンという表現にする．

2006 年 2 月，W.V. ランディンガムは，699 ミリオン回繰り返して 289 ミリオンの桁になったが回文数でなく，計算は続行中であるという[5]．この数がいかに大きい数字であるかを示すために指数表示であらわすと数は $10^{289,430,478}$ の大きさになっているが回文数ではないということである．

$289 \div 699 = 0.413\cdots$ であるから，1 回の計算で約 0.4 桁大きくなる．2 回で約 1 桁ということか．

アシモフの本の原著は 1979 年であるから，1 ミリオン（100 万）桁には達していなかったのではないか．あれから 30 年近くたっている．コンピュータの技術革新が進みパソコンの性能もよくなった．数は 289 ミリオン桁であるが，いまだ未解決である．

以上は 196 が回文数にならないという世界記録であるが，別の記録もある．それを表 2 に示す．回文数になるもので，到達するのが最も遅い数は何回繰り返す必要があるかということだ．

桁	数	繰り返し回数
2	89	24
3	187	23
4	1,297	21
5	10,911	55
6	150,296	64
7	9,008,299	96
8	10,309,988	95
9	140,669,390	98
10	1,005,499,526	109
11	10,087,799,570	149
12	100,001,987,765	143
13	1,600,005,969,190	188
14	14,104,229,999,995	182
15	100,120,849,299,260	201
16	1,030,020,097,997,900	197
17	10,442,000,392,399,900	236

表 2．回文数に至る最大繰り返し回数(J. Doucette, 2005)

この表は，2 桁の数 89 は 24 回繰り返して回文数になり，3 桁の数 187 は 23 回繰り返して回文数になると読む．回文数になるための最大繰り返し回数をもとめたもので，そして，17 桁の数で

10,442,000,392,399,900 は 236 回繰り返してやっと回文数になったのが現在の世界記録で J. デューセが 2005 年に計算している[6]．

6. 196 問題は解決するか？

世界記録は更新中であるが，196 問題は果たして解決するのか，ここでは角度を変えて数の桁が増えると回文数である比率はどのようになっていくかを考えてみよう．1 桁の数は 1 から 9 までの 9 個あるが，これらはすべて回文数とみることができる．2 桁の数は 10 から 99 までの 90 個あるが，回文数は 11，22，33，44，55，66，77，88，99 の 9 個であり，回文数の比率は $9/90 = 0.1$ である．

3 桁の数は 100 から 999 までの 900 個あるが，回文数が何個あるかはつぎのようにして計算できる．3 桁の数で回文数となるのは，つぎの形をしている．

$1x1,\ 2x2,\ 3x3,\ 4x4,\ 5x5,\ 6x6,\ 7x7,\ 8x8,\ 9x9$

x に入る数は 0 から 9 までの 10 通りが考えられるので，回文数は $9 \times 10 = 90$ 個である．回文数の比率は $90/900 = 0.01$ である．

4 桁の数は 1000 から 9999 までの 9000 個あるが，4 桁の数で回文数となるのは次の形をしている．

$1xx1,\ 2xx2,\ 3xx3,\ 4xx4,\ 5xx5,\ 6xx6,$
$7xx7,\ 8xx8,\ 9xx9$

xx に入る数は 00 から 99 までの 10 通りが考えられるので，回文数は $9 \times 10 = 90$ 個である．回文数の比率は $90/900 = 0.01$ である．同様にして，5 桁と 6 桁も計算でき，それらを表 3 にまとめた．

桁数	合計	回文数	比率
2	90	9	0.1
3	900	90	0.1
4	9000	90	0.01
5	90000	900	0.01
6	900000	900	0.001

表 3．回文数の比率

一般に，$2n$ 桁の場合，回文数の比率は $\dfrac{1}{10^n}$ となる．また，$2n+1$ 桁の場合は，$2n$ 桁の比率と同じである．したがって，$2n$ 桁（偶数桁）と $2n+1$ 桁（奇数桁）の回文数の比率は $\dfrac{1}{10^n}$ とまとめることができる．

このように数の桁が増すにつれ，2 桁につき 10 分の 1 ずつ回文数の比率が減っていく．現在 196 が 289 ミリオンの桁になっているが，この桁で回文数であるための比率がいかに小さいかが想像できるであろう．しかし，いくら比率が少なくなるといっても回文数は存在するのである．そこが数学者にとってはもどかしい問題なのである．

回文数の比率は確かに極端に小さくなっていくが，その前に足し算という操作が入る．2 桁の数は非回文数が 81 個あるが，そのうち 49 個（60%）は 1 回の操作で回文数となる．これは大きな確率である．また，3 桁の数は非回文数が 810 個あるが，そのうち 213 個（26 %）は 1 回の操作で回文数となる．1 回の操作で回文数となるのは桁数が増すにつれて少なくなるであろうが，先に見た回文数の比率に比べると大きい．

現在，196 が 289 ミリオンの桁を延々と計算中であるが，その数は回文数に近づいているのか，非回文数でありつづけるのか不明である．どういう状態で推移しているのもわかっていない．かつて四色問題が最終的にコンピュータの力を借りたが，コンピュータを使わない，もっと数学的なアプローチがあってもいいのではないだろうか．回文数と 196 問題に興味を持たれた読者は証明に是非ともチャレンジしてください．

(参考文献)

(1) アシモフ，星新一訳『アシモフの雑学コレクション』新潮社，1986 年

(2) I. Asimov, Isaac Asimov's book of facts, New York: Grosset & Dunlap, 1979.

(3) C.W. Trigg, Palindromes by addition, Mathematics Magazine, 40 (1967) 26–28.

(4) D. Lehmer, Sujets d'étude, Sphinx (Bruxelles), 8 (1938) 12–13.

(5) W.V. Landingham, 196 and Other Lychrel Numbers, 2006.

(6) J. Doucette, 196 Palindrome Quest, Most Delayed Palindromic Number, 2005.

(にしやま ゆたか／大阪経済大学)