を得る．これらより

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_n, \quad b_{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}b_n \quad (n \geqq 1)$$

となるので，係数 a_n, b_n は容易に（実数値として）定められる．（全くの高校数学故，読者への演習としておく．）

かくして

$$f(z) = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots, \quad g(z) = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots.$$

収束半径はどちらも ∞ である．この表式より $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$ となることは明白であろう．**アーベルの定理**(3)' によりどちらも収束半径 ∞ で収束するので，これを以て $f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$ と定義する訳である．

さて，では，これまでのように，$z = x + yi$ に対して $f(z)$, $g(z)$ を $u(x,\ y) + iv(x,\ y)$ の形で表してみよう．此の際は，整級数の方からでは煩わしいので，直接，$f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$ の方から u, v を決定した方がよい． $f(z)$ の方だけに就いて論じてみよう： $f(z) = u(x,\ y) + iv(x,\ y)$ と表せば，

$$u(x,\ y) = \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\sin x, \quad v(x,\ y) = \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\cos x$$

となる．そして，これらは，$u(x,\ -y) = u(x,\ y)$, $v(x,\ -y) = -v(x,\ y)$ を満たすことが目の子でおわかり戴けよう．これらの意味することは

$$f(\bar{z}) = u(x,\ -y) + iv(x,\ -y) = u(x,\ y) - iv(x,\ y) = \overline{f(z)}$$

$$\text{即ち，} \quad f(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

ということに他ならない．（このようなことは，勿論，$g(z)$ の方でも同様である．）

一般に超越整関数 $f(z)$ は収束半径 ∞ の整級数で展開される．そして，もし（広く）整関数 $f(z)$ が，実軸上（つまり x 軸上）で実数値をとるなら，$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$，即ち，$f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ がいえる（――これは，⓱ 問題 2(1) の一つの略解答でもある）．

此の様な事は大きく一般化されるが，本稿では，これくらいで留めておく．

注 1．整関数は，z の整式で表される**有理整関数**と整級数で表される**超越整関数**に分けられるが，いずれにせよ，$|z| < \infty$ の領域で微分可能であって，そして $\lim_{z\to\infty}|f(z)| = \infty$（，つまり，$f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有界でない）となるものである．

$f(z)$ が $z = \infty$ でも微分可能かつ $\mathbb{C}$ で有界なら，$f(z)$ は定数でしかない．だから，$f(z)$ が定数でないような整関数は $z = \infty$ で特異的（，つまり，発散したり，微分不能となる）になる訳である．

問題 2.1　微分方程式 $f''(z) = -f(z)$ を満たす $f(z)$ の整級数解を求めよ．

問題の略解

問題 1.1　(1) 各点収束するが一様収束はしない．(2) 各点収束も一様収束もする．

問題 1.2　(1) $R = 1$.　(2) $R = \infty$.　(3) $R = 1$.

問題 1.3　$c_1 \sin z + c_2 \cos z$ (c_1, c_2 は任意の複素定数) を整級数展開したもの．

（なかむら　ひでき）

数学を楽しむ

曲線の文化と直線の文化

西山　豊

1. 石の文化と木の文化

ヨーロッパの建物が日本のそれとどこか違うと感じたのは 2000 年にはじめてフランスへ旅行したときのことである．パリで 5 日間，南仏のアビニョンで 5 日間の短い旅であったが，街の景色を見るたびに門や窓がことごとくアーチ状になっているのにちょっと驚いた．長年，日本に住んでいるので建物は直線で構成されると信じている．柱は地面から垂直に立っている．梁（はり）は柱の間を水平にわたっている．柱も梁もどちらも直線だ．門や窓枠も長方形で直線である．屋根も傾斜しているがほぼ直線である．鉄筋コンクリートでできているビルディングは垂直方向，水平方向ともに直線である．

ところがヨーロッパの建物は水平方向が直線でない．アーチ状，つまり曲線である．屋根はドーム状になっていて丸い．門の開口上部はアーチ状になっていて丸い．窓も開口上部はアーチ状で丸い．橋はアーチ状で丸い．垂直方向は直線であるが，水平方向は直線ではなく曲線である．ルーブル美術館で観た絵画はアーチ状のヨーロッパ建築で美しい．ヨーロッパの建物は直線ではなくどうして曲線なのだろうか．ヨーロッパ人は曲線が好きな人種なのだろうか，などと考えたが，この疑問は南仏のアビニョンへ行ったときに解決した．

アビニョンの近くにアルルやオランジュの小さな町があり，ここには古代ローマ時代に建てられた遺跡がある．遺跡は表面がはがれているので建築物の建築過程がよくわかる．門や窓の開口上部がアーチ状になっている理由は，これらが石で造られているからだ．このような単純なことは日本にいる間は考えつかなかった．ヨーロッパの建物は石で造られ，日本の建物は木または鉄筋コンクリートで造られている．石で造ると門や窓の開口上部は丸くなり，木で造ると直線になる．つまり，建築物の材料の違いが建築物の形を決めているのである．

2. イギリスの気候と建物

私は，2004 年夏デンマークでの数学教育世界会議（ICME 10）に参加し，2005 年度はイギリスへ 1 年間の留学の機会があった．そこでヨーロッパの建築の形について素人ではあるが調べてみることにした．

窓の特徴は次の通りである．まず気づくのは，窓の縦と横の比率が日本の窓に比べると大きい，つまり縦長であることだ．横が 1 に対して縦が 2 のものもあった．また，日本では窓は 2 枚あって，それらが水平方向に可動であるが，イギリスでは 1 枚のものが多く，それらは固定になっていることが多い．動くといってもほんの少しである．換気は大丈夫かと思ったが，換気はうまくいっているようだ．

イギリスは大火の経験からセントラルヒーティングが完備されガスは使っていなかった．ストーブも電気毛布もいらない．ストーブがないので二酸化炭素の発生量も少なく，換気の必要がそれほどないのかもしれない．

東京は北緯 36 度であるが，ロンドンは北緯 54 度である．札幌は北緯 43 度であるから，北海道よりかなり北に位置する．しかし，メキシコ湾から 流れる暖流が，寒さを幾分和らげている．イギリスの天気は「一日の中に四季がある」と 例えられるように，昼間は暖かくて日が照っていても急に雨が降り出したり，冷えこんだりすることも多い．

なぜ天気が急激に変化するかは山が無くなだらかな丘であるからだ．北部のスコットランドは山があるが，南部のイングランドは山がない．日本のように山があると空気をさえぎるがイギリスではそういうことはない．海洋の気象がそのままイギリス国土に影響しているとみてよい．

イギリスと日本の時差は旅行案内書では8時間または9時間とある．これはイギリスがサマータイム制をとっているからである．サマータイムは日本では馴染みが無いが緯度の高い北欧はこの制度をとっている．緯度が高い国では夏は昼が長く，冬は夜が長い．夏は夜の9時過ぎでも明るく人々は外で会話を楽しんでいる．ところが冬は夕方3時で暗く，寒い．したがってイギリスへ留学するなら4月から9月までの半年がよく，あとの半年はイタリアなどへ移動するのがベターであろう．

サマータイム制で私はちょっと面白い経験をした．イギリスからベルギーへ2泊3日の小旅行をした．ヨーロッパの新幹線であるユーロスターに乗り2時間40分のところにベルギーの首都ブリュッセルがある．出発したのは10月29日で帰ってきたのが10月31日であった．イギリスとベルギーの時差は1時間である．行き返りに時計を現地時間に合わせた．これは慣れているが，イギリスの10月30日(日)がサマータイム切り替え日であったので混乱してしまった．携帯電話，腕時計，パソコンのタイマー，下宿の掛け時計，テレビの時刻，街路にある時計，これらが変わっているのと変わっていないのがあり混乱した．昼食の時間にカレッジの食堂へ行っても誰もいなかった．その一日はなんだか狐につままれたような一日だった．

夏の最高気温は25度で，暑い日といっても5日以上続くことはない．この5日間の暑さを我慢すれば大丈夫ということで，イギリスにクーラーはなく扇風機だけである．滞在中は扇風機はほとんど使わなかった．

ケンブリッジに滞在していたが週末は美術館や博物館の見学でロンドンへ出かけた．ロンドンはケンブリッジから列車で1時間くらいのところであるが，ディーゼル機関車であったが氷の上をすべっているような感じであった．どうしてかというと，暑さでレールが膨張して 曲がる心配がなく日本のようにレールのつなぎ目をかなり開けておく必要がないからだ．イギリスはレールの隙間が小さいのだろうか．ガタンコトンという音はほとんど聞くことが無かった．

イギリスは地震のない国である．マグニチュード4以上の地震の記録は歴史上皆無である．地球の表面は，10数枚の板(プレート)でおおわれていて，プレートは，厚さが100 kmもあり，それぞれ違う方向に動いている．プレートが生まれる海嶺では小さな地震が起き，ヒマラヤのようにプレートがぶつかったり，日本海溝のようにプレートが潜り込んだりするところでは，巨大地震が発生している．

日本周辺には4枚のプレートがあり，東日本では北米プレートの下に太平洋プレートが，西日本ではユーラシアプレートの下にフィリピン海プレートが沈み込んでいる．また，伊豆半島から小笠原諸島ではフィリピン海プレートの下に太平洋プレートが沈み込んでいる．これらのプレートが押し合って我慢の限界に達した時，地震が起こる．このようにプレートが集まっているため，日本では地震が多い．

イギリスはユーラシアプレートの中にあり，プレートの境界にいないので地震はおこらない．

ケンブリッジのキングスカレッジは1446年に建築されているので500年以上経過している．この間大きな地震はなかったという．鉄筋もなにもない．石が積んでいるだけである．よくもっているものだ．石造で鉄筋なしだという．あんなに高い建物は日本なら地震でもたないだろう．

3. 窓の形あれこれ

イギリスの住宅はハウスとよばれる一戸建てとフラット(Flat)とよばれる集合住宅に代表される．ハウスは部屋数も多く庭がついていて裕福でないと住めない．フラットはアパートに対応するがそれほど狭くなく，日本でいう3階建てのところもある．イギリスのグランド・フロアー，ファースト・フロアー，セカンド・フロアーは日本の1階，2階，3階に対応している．ハウスやフラットはおもに均一なレンガ(煉瓦)を積み上げることでできている．ケンブリッジで建築中の建物をときどき見たが煉瓦はセメントのようなもので接着しているが鉄筋をとおしていることはなかった．ただ積み上げているだけだ．大丈夫かなと思ったが地震のない国だから大丈夫なのだろう．

ケンブリッジ市内の窓の写真を撮ってみた．図1は比較的新しいフラットの窓枠で，ガラスの部分は長方形で直線であるが，ブロックは放射状に積んである．そして下の部分が直線にカットしてある．石の建築が進化して最終的にこのような形になったのだろうか．

私はこの窓の開口上部が気になってしかたがなかった．レンガは綺麗にそろえて積まれているが，開口上部だけ違った積み方がされている．そのために美観をそこなうものであった．

図1．代表的な民家の窓枠

これよりもう少し古い建築と思われるものに図2の窓枠があった．ガラスの部分は長方形で直線であるが，窓の上部のブロックは直線でない．10センチメートルもないせまい幅であるがアーチ状になっている．私は「究極の窓枠」と命名した．

図2．どんなに狭くても円弧(究極の窓枠)

ところが，ときたま図3のような窓枠も見つけることができる．力学では不可能なブロックの積み方である．ブロックを水平にもたせるためには左右両端から無限大の力が必要である．そうでなければ内側のガラス窓の力でブロックが落ちてこないように持ちこたえているのであろう．

図3．力学では不可能な窓

窓枠はすべてアーチ状かというとそういうことでもない．図4のような直線で構成されたものもあった．開口上部は水平方向に直線で，その両端に傾斜のブロックが積まれている．斜めのブロックは力学的に可能だが，開口上部のブロックはやはり気になる．内側のガラスや鉄枠で上のブロックが落ちてこないように支えているのだろうか．

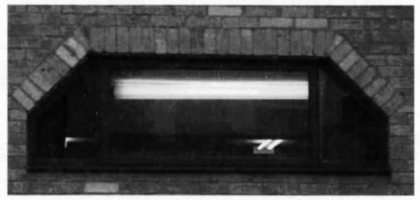

図4．多角形の窓

図5はアーチ状の門である．石の積み方に注意すること．石は放射線状に2層積んである．水平ではなくアーチ状にするとブロックは落ちてこない．

図5．アーチ状の門

図6はフィッツ・ウイリアム博物館の窓枠である．図5の門と同じく大理石が放射線状に3層積んである．そのため，窓の形はアーチ状(円形)になっている．アーチ状に積んだ場合，中央上部に大きな力が働くので大きめの大理石が使われている．真ん中のブロックは左右のど真ん中にあるので傾斜が垂直，90度である．90度は力学的には不可能であるので，傾斜をつけるため大きめの大理石が使われているのであろう．アーチ状に積むと真ん中のブロックが一番問題になることは石で建築することの宿命であるように思われる．

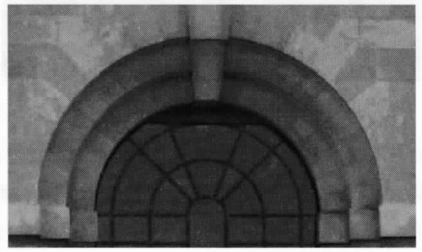

図6．フィッツ・ウイリアム博物館(ケンブリッジ)

ケンブリッジから列車で1時間くらい行ったところにピーターバラがある．ここにはゴシック建築のカセドラル(大聖堂)がある．図7は同市内にあったチャーチ(教会)の窓枠でゴシック様式である．ヨーロッパはキリスト経文化圏であり，どこの国もチャーチとよばれる教会とカセドラルとよばれる大聖堂がある．窓枠の形は図6のように円弧になってなく，尖った形をし

ている．これはゴシック建築の基本形で建物を高く建てることができる．私はこの形に興味をもって，もしかしたら積み木問題で考えた調和級数，つまりLog関数の形になっているのではと思った．しかし，写真をトレースして調べたところ2つの円弧を重ねているに過ぎないことがわかった．中心角が180度の円弧を1つとするより，中心角が60度の円弧を2つにした方が中心部の負担が少なくて済む．機能的には水平で直線が一番よいのはわかっている．ところが石を積むので水平方向に積むことは不可能で，円または円弧でなければならないというジレンマがある．

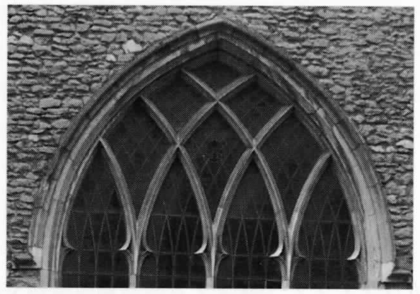

図7．ゴシック建築の窓（ピーターバラ）

図8はスコットランドのエディンバラに出かけたとき，偶然見つけた劇場の門である．門の中央のかなめ石は美観をそこねるのだろう．建築家はかなめ石をライオンの舌にデザインしてそれを隠そうとしたのである．

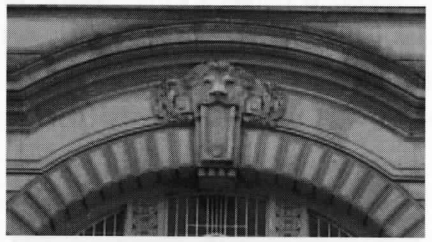

図8．かなめ石を隠す芸術（エディンバラ）

図9は私の滞在していたフラットの扉の写真である．扉は長方形で縦横ともに直線であるので，ガラスを円弧にする必要がないが，どういうわけかアーチ状になっていた．これはヨーロッパの石造文化の影響だろうか．

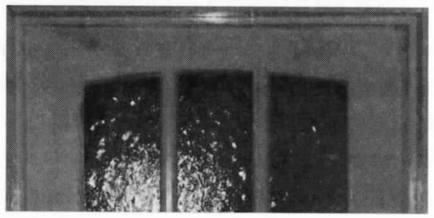

図9．不必要な扉のアーチ（下宿先のフラット）

4．財産としての石造建築

地球上のすべての物体は地球の引力の影響を受けている．引力の影響で建築物が水平方向にいかに弱いかがわかる．たとえば鉄塔と鉄塔の間に張られた送電線は重力でたるんでいる．まっすぐに張るには無限大の力が必要であり，それは不可能なので懸垂曲線の形をしている．同様にして建築物の梁にも重力が働き，たわみによる変形で水平を保つことが難しい．

窓枠の開口上部の石には，石自身の重さと上部の重さによって「曲げ」の力が働いて中央部が下にたるんでくる．木や鉄を引張り変形したときの応力とひずみの関係は，応力–ひずみ曲線で表される．変形の初期には弾性変形がおこり，応力–ひずみ曲線は直線関係で与えられるが，応力が大きくなると塑性変形が生じて直線からずれる．そして降伏点に達すと材料は破壊される．

木はしなやかで弾力があり，比較的長いものが柱や梁の材料として取れる．加工しやすいが，燃えやすく火災に弱いという難点がある．鉄は木より強く弾力があるが，さびやすい．鉄と石の性質を合体したのが鉄筋コンクリートである．

石は堅くて強くて重いが弾性体ではない．加工しにくく，横に細長い石を材料として得ることは難しい．石には花崗岩，大理石，石灰岩などがある．建築物の外部には花崗岩が，内装用には大理石や石灰岩が用いられる．石灰岩は大部分が炭酸カルシウムからなる岩石で，炭酸石灰質の殻を持つ生物の化石や海水中の成分が沈殿したものである．その石灰岩が熱の影響で変性し再結晶したのが大理石である．石灰岩や大理石は酸性雨に弱い．

地球温暖化防止の京都会議でヨーロッパ諸国が二酸化炭素の排出規制をなぜ強く望んでいるのかがわかるような気がする．彼らは鉄筋コンクリートの建物を極度に嫌う．鉄はさびて寿命が短かく，石造建築は400年から500年は持つことを知っている．留学中にカレッジのスタッフが新築の校舎について議論していて，鉄筋コンクリートの建物は毛頭考えていないと言っていたのが印象的だ．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

ディアディク入門 ―――― 補遺（Vの4）

大塚正元

本編において引用されている式番号（i）～（xv）は，ディアディク入門（I）～（IV）の中の式に対する代用番号であり，これらの式は，本編末尾に列記されている．

4　直交変換

ベクトルの2乗の値を変えない変換を直交変換という．$\boldsymbol{S}$ を直交変換を表すディアディクとし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ が，

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1}$$

に変換されたとすると，定義により，且つ（i）を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'^2 = \boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{v}' &= (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\\ &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

から，

$$\boldsymbol{v}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

が任意の $\boldsymbol{v}$ について成り立つことになるので，

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} \tag{2}$$

である．

（証明）

一般にディアディク $\boldsymbol{T}$ が，任意の $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} = 0$$

を満たすならば，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$ に対して

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{T}\cdot(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j)\\ &= \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j\\ &= \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_i = 0\end{aligned}$$

から

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

となり，（ii）により $\boldsymbol{T}$ は，反対称である．ところで

$$\boldsymbol{T} = \widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}$$

とすれば，（iii），（iv），（v）により

$$\widetilde{\boldsymbol{T}} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I}} = \widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}}-\widetilde{\boldsymbol{I}} = \widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{S}}}-\boldsymbol{I} = \widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}$$

であるから，$\boldsymbol{T}$ は，対称でもある．即ち，

$$T_{ij} = -T_{ji} = T_{ji}$$

から

$$T_{ji} = 0,$$

即ち，

$$\boldsymbol{T} = 0$$

となり，（2）が得られる．（証明終り）

$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{S}$ により，それぞれ，$\boldsymbol{u}'$，$\boldsymbol{v}'$ に変換されると，（2）により

$$\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3}$$

である．即ち，ベクトルのｽｶﾗｰ積は，直交変換によっては変わらない．

（vi）及び（vii）により

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}) = \det(\widetilde{\boldsymbol{S}})\det(\boldsymbol{S}) = (\det\boldsymbol{S})^2$$

であり，（2）から

$$\det(\widetilde{\boldsymbol{S}}\cdot\boldsymbol{S}) = \det(\boldsymbol{I}) = 1$$

であるから

$$\det(\boldsymbol{S}) = \pm 1 \tag{4}$$

である．即ち $\det(\boldsymbol{S}) \neq 0$ であるから，（viii）により逆ディアディク $\boldsymbol{S}^{-1}$ が存在する．（2）の右から $\boldsymbol{S}^{-1}$ をかけると，

$$\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^{-1} \tag{5}$$

であり，逆ディアディクは転置ディアディクに等しいことが分かる．（5）の左から $\boldsymbol{S}$ をかけると

$$\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{I} \tag{6}$$

となる．（2）及び（6）の両辺の ij 成分をとると，（ix）に注意してそれぞれ

$$\sum_{k=1}^{3} S_{ki}S_{kj} = \delta_{ij}, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{3} S_{ik}S_{jk} = \delta_{ij} \tag{8}$$

となる．