ラ哲学に，ある種の強い共感を懐いていたライプニッツは『形而上学叙説』でも同様のことを繰り返し述べています．すなわち「物体のさまざまな現象を説明するには，拡がりというものからはなれた形而上学的考察によらなければならない」とか「もし，力学の法則が幾何学だけに依存して形而上学を欠くとすれば，現象はまったくちがったものになるであろう」とか，あるいはまた「物体の本性の一般的原理，さらにまた力学の一般的原理は幾何学的というよりもむしろ形而上学的であり」といった具合にです．

いったいこれはなにを意味しているのでしょうか？わたしは，ながいことこの問題を考えたことがありますが，ライプニッツのいう「形而上学」とは「『無限者』をその源泉とする『連続性の哲学あるいはその原理』」のことではないかと結論づけるようになりました．ここではライプニッツにとっての「無限者と神」の問題はおくとして，かれにとって「連続性の哲学」と「形而上学」はシノニムであり，「連続性の哲学」として「形而上学」を語っていたのではないかと思われます．したがってその「形而上学」は，無限と連続概念をその核にもつ近代数学の萌芽であったということもできるのではないでしょうか．

ライプニッツは書いています．「与えられ仮定された要素の系列において，2つの項の区別が無制限に減少するとき，その系列から生じる従属的な要素において，必然的にその区別は，任意に小さな量よりも，その区別が小さくなる[8]」——これは要するに，連続関数の概念であり，いま「2つの項」を a, x とし，$x \longrightarrow a$（2つの項の区別が無制限に減少する）のとき，その系列から生じる従属的な要素，すなわち $f(a)$, $f(x)$ においても $f(a) \longrightarrow f(x)$ のようになる，ということを述べているのです．

もっと，いま風にのべれば，任意の正数 ϵ に対して，ある正数 δ が定まって，

$$|x-a| < \epsilon \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \delta$$

が成り立つ，ということにほかなりません．

またライプニッツはこんなことも述べています．「所与の系列において2つの項が互いに連続的に近づくとき，すなわち最後に一方が他方に移行するとき，従属的に対応せる所求の系列において同じことが必然的に行われる」と．そして，これは「所与の中の法則的秩序は所求の中の法則的秩序に対応する」という一般的な形に敷衍されます．沢口氏は，このあたりの消息を「これらの原理の表現を見るとほぼ函数の連続性に相当することは明らかであるが，これは原理であって定義ではない．ライプニッツによれば，これは数学，物理学などに遍ねく適用する普遍的原理であって，その源泉は無限者にあるという．つまり真なる形而上学的原理なのである」と述べられています．確かに，ライプニッツの「形而上学」は「19世紀の後半に至って，批判数学の発展の後，連続性の本質が闡明されて，始めて論理的根拠を獲得[9]」するための魁であったというべきなのです．

わたしたちは，さらに「連続の問題」を考えるために，そのもっとも典型的モデルである「実数」について考えてみなければならないでしょう．

（かわた　なおき）

[8] 沢口昭聿著『連続体の数理哲学』序論参照．
[9] 高木貞治著『数の概念』序．

次号予告

理系への数学　2007.4

離散数学の魅力／離散数学へのいざない	伊藤大雄
集合・位相に楽しむ／証明にベン図を使うべからず	庄田敏宏
微積分再挑戦	桑野耕一
無限と連続	河田直樹
偏微分方程式への誘い	井川　満
フーリエ解析の話／シュレーディンガー方程式と擬微分作用素	北田　均
微分幾何学の眺め	小野俊彦
多変量の微積分／全微分方程式	一松　信
複素数の世界への招待／グリーンの定理	中村英樹
回転群と球関数／内積空間	中村英樹
数学の未来史	山下純一
数学を楽しむ／バーンサイドの補題	西山　豊
院への経済数学周遊／経済成長理論再論	中村勝之
大学院入試問題散策・代数学講話	永田雅宜
入試問題への道草／最小原理とフェルマーの作図問題	岸　吉堯
院への数学レクチャー／タイプし，論文として明後日に提出しなさい！	梶原壌二

数学を楽しむ

$\sqrt{2}$ の計算

西山　豊

1. コピー紙の縦と横

ルート2について文科系大学生がどれだけ知っているだろうか．私は情報数学の講義で取り上げてみた．ルート2は $\sqrt{2}$ と書き，自乗すると2になる数である．この値を学生に言わせて見る．知らない学生には，

$1^2=1$ と $2^2=4$ より $1<\sqrt{2}<2$

$1.5^2=2.25$ と $1.4^2=1.96$ より $1.4<\sqrt{2}<1.5$

のように計算をして，はさみうち法によりルート2の値をある程度は筆算で求められることを説明する．計算しなくてもルート2は1.41421356（ヒトヨヒトヨニヒトミゴロ），ルート3は1.7320508（ヒトナミニオゴレヤ）などの語呂合わせで覚えている学生もいる．

身近なものとしてA4サイズ，B4サイズなどのコピー紙は縦と横の比率が1対ルート2になっているが意外と知られていない．中学の幾何の時間または高校の1年生で習っているはずだが，受験に数学が必要なかったのか，それとも数学嫌いなのか忘れてしまっている．そこで，この問題を学生に考えさせてみる．

問1　コピー紙の縦と横の比率を求めよ．

縦と横は1対2，あるいは2対3だと学生は見た感じで答える．そこで，コピー紙はこのように半分に折っても縦と横の比率が変わらない素晴らしい性質を持っていると実演する．このような図形を相似図形という．学生たちは始めて知ったのか，この事実にあらためて感動する．この相似を使えば縦と横の比率は求まるのだ．

長方形の縦と横の比率を1対 x としよう．半分に折った長方形を考えてみると，縦が $\frac{x}{2}$ で横が1になるから，

$$1 : x = \frac{x}{2} : 1$$

となる．内項の積は外項の積に等しいから（これは中学校で習っているはずだ），

$$x \times \frac{x}{2} = 1 \times 1$$

となり，これを解いて $x=\sqrt{2}$ を得る．つまり，コピー用紙の縦と横の比率は $1 : \sqrt{2}$ であるのだ．

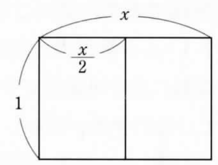

図1．コピー紙の縦と横の比率

2. 無理数であることの証明

ルート2は無理数として知られている．そこで無理数はどんな数だろうかと学生に質問すると，無理数は小数点以下が無限に続く数である，と答える．

それでは

$$0.999999\cdots$$

のように無限に続く数も無理数なのだろうか，と意地悪な質問をする．

$$\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.999999\cdots$$

であるから

$$1 = 0.999999\cdots$$

となり，これは無理数でない．

無理数は正確には循環しない無限に続く数である．

$$\frac{2}{15} = 0.1333333\cdots$$

$$\frac{1}{7} = 0.1428571428571\cdots$$

などのように無限に続くが，小数点以下が循環する場合は無理数とは言わない．循環小数は無限級数を計算することで分数に表すことができる．

有理数は整数の比で表されるが，無理数は整数の比で表されない．ここまで正確に答えられる学生は少ない．無理数の「無理」は日本語では他の意味にもとらえら適語ではない．明治時代に英語の rational number と irrational number を翻訳して有理数と無理数になったが，意味的には整数比で表されるかどうかの違いであるから，「有比数」と「無比数」にした方が正しいと指摘する数学史家もいる．

問 2　$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．

さて，ルート 2 が無理数であることの証明をしてみよう．つまり整数比で表されないことの証明である．これは高校の数学Ⅰ・Aの教科書に説明されているが，証明問題は大学受験に出る可能性が少なく勉強しないようで，わかっていない学生が多い．これは大切なことなので，ここに再録する．証明は背理法を用いる．

ルート 2 が，

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}\ (p \text{ と } q \text{ は互いに素な自然数})$$

のように整数の比で表されたとする．互いに素ということは既約分数で表されていることである．この式の両辺を自乗して分母を取り払うと

$$q^2 = 2p^2$$

となる．この式より q^2 は 2 の倍数である．q^2 が 2 の倍数であるなら q も 2 の倍数である．(証明のこのあたりがちょっと難しい．) そして，

$$q = 2m\ (m \text{ は自然数})$$

とおく．そしてこの式を前式に代入して整理する．

$$4m^2 = 2p^2$$

$$p^2 = 2m^2$$

この式から p^2 は 2 の倍数である．p^2 が 2 の倍数であるなら p も 2 の倍数である．以上の結果をまとめると，q は 2 の倍数であり，p は 2 の倍数である．このことは p と q はたがいに素であると仮定したことに矛盾する．よって $\sqrt{2}$ は $\frac{q}{p}$ のように分数(整数比)で表すことができなく，無理数である．

3. 有理数の濃度と無理数の濃度

有理数の数(かず)と無理数の数(かず)はどれくらいあるのだろうか．どちらが多いのだろうか．ここにちょっと面白い話題を紹介しよう．

ユークリッド幾何学では「三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より大きく，2 辺の差は他の 1 辺より小さい」と学んできたはずだが，「三角形の 2 辺の和は他の 1 辺に等しい」あるいは「すべての線分の長さは等しい」ことを証明しよう ?! もちろん，これは詭弁であるが，どこが間違っているか見抜けるだろうか．

図 2 のように三角形 ABC がある．底辺 BC と平行に $B'C'$ を引く．一般に「直線は点の集まり」であり，「平面は直線の集まり」であり，「立体は平面の集まり」である．線分 BC は点がぎっしり詰まっている．その代表として点 P を選ぶ．点 P と頂点 A を結ぶと線分 $B'C'$ と交差する．そこで，その交点を Q とする．線分 BC 上のすべての点は線分 $B'C'$ 上の違った点として対応する．線分は点の集合であると仮定したので，線分 BC と線分 $B'C'$ は等しい．

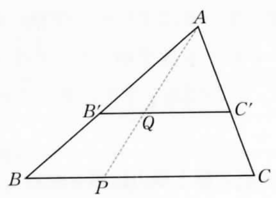

図 2．線分 BC と線分 $B'C'$ は等しい？

私は大学 1 年生の頃，習いたての大学数学を友達に話したくて仕方がなかった．この詭弁は「線は点の集合である」ということに間違いがある．点はいくら集まっても線にはならない．ただ点が集まっているだけだ．

そして，自然数，有理数や無理数の数(かず)はどちらも無限にあるが，自然数と有理数は番号が付けられる(数え上げることができる)無限の集合であるが，無理数は番号が付けられない(数え上げることができない)無限の集合であることがわかっている．

カントールは対角線論法を用いて，自然数と区間 $(0,\ 1]$ の実数には 1 対 1 の対応がつかないことを証明した (1891 年)．自然数の集合と 1 対 1 の対応が存在する集合の濃度は，自然数の集合の濃度と等しいわけであるが，この濃度を $\aleph_0$ と書き「アレフゼロ」と読む．有理数は自然数と 1 対 1 の対応がつくから濃度は $\aleph_0$ である．$\aleph$ は英語の A に対応するヘブライ語の文字である．濃度が $\aleph_0$ である集合は可付番である，あるいは可算無限であるという．それに対して実数の集合の濃度を $\aleph$ と書く．そして

$$\aleph_0 < \aleph$$

である．

4. 接線の方程式

話がだいぶそれてしまった．今回のテーマはルート 2 の計算についてであった．ルート 2 は 2 次関数とそれに接する接線の方程式がわかれば効率よく求めることができる．接線の方程式は高校数学の数学Ⅱで習った微分の考え方を使えばよい，と説明しても，文科系大学生は大学受験に必要なかったから微分や積分を授業で習わなかったと言う．そこで学生の言い分に妥協して数学Ⅰの 2 次関数についての予備知識だけで説明する．

2 次関数は 2 次に比例する関数である．中学校では 1 次に比例する直線の 1 次関数を学ぶが，高校では 2 次に比例する曲線の 2 次関数を学ぶ．2 次関数の概略図をノートに描かせてみると，これは覚えている．つぎに，2 次関数に接する接線の方程式を求める問題を出す．

問 3　$y = x^2$ の $x = 2$ で接する接線の方程式を求めよ．

微分を習ってないのでできないと文句をいう学生が多いので，微分を使わずに数学Ⅰだけの知識で解ける方法を説明する．2 次関数を $y = x^2$，接線の方程式を $y = ax + b$ とする．接するということは 2 次関数と直線が「1 点で交わる」ということだ (図 3)．そこで，2 つの式において，これらの解が重解 (解がひとつ) をもつ条件を求めてみよう．

$$x^2 = ax + b$$

$$x^2 - ax - b = 0$$

判別式 $D = a^2 + 4b = 0$ から

$$b = -\frac{a^2}{4}$$

接線は 2 次関数上の点 $P(x,\ x^2)$ を通るから，接線の方程式に代入して，

$$x^2 = ax - \frac{a^2}{4}$$

これを解いて，

$$4x^2 = 4ax - a^2$$

$$a^2 - 4xa + 4x^2 = 0$$

$$(a - 2x)^2 = 0$$

となり，接線の方程式の定数が求まる．

$$a = 2x$$

$$b = -\frac{4x^2}{4} = -x^2$$

以上を整理すると，点 $P(x,\ x^2)$ で接する接線の方程式を $(X,\ Y)$ を変数とすれば，

$$Y = 2xX - x^2$$

となる．この式に $x = 2$ を代入すると

$$Y = 4X - 4$$

つまり

$$y = 4x - 4$$

が接線の方程式となる．微分を使わなくても計算はできることは確かだ．

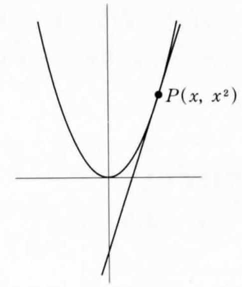

図 3．2 次関数と接線

5. ニュートン・ラプソン法

以上は数学Ⅰレベルの知識で接線の方程式を計算したが，微分を使って接線の方程式を求めてみよう．

まず，2 次関数 $y = x^2$ の点 $P(x,\ y)$ で接する接線の傾きを求めてみよう．接線の傾きは微分係数とし

て求まる．微分係数の考え方は次の通りである．最初から点 $P(x, y)$ の1点だけで接すると考えるのではなく，x 座標がわずかに h だけ離れた点との2点 $Q(x+h, (x+h)^2)$ で交わっていると考える．そして点 P と点 Q の勾配を計算する．

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+h)^2-x^2}{(x+h)-x}=\frac{2hx+h^2}{h}=2x+h$$

そこで，接するとは1点で交わることであるから，点 Q を点 P に近づけることにする．つまり Δx を0に近づけるのである．Δx を0に近づけるとき，Δy も0に近づき，分母も分子も0に近づくので値が求まらないのではと思うだろうが，値はきちんと計算される．このような操作を極限をとると言う．そして，この値が接線の傾きになり，これを導関数 $f'(x)$ として表す．

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=2x$$

また，接線は点 $P(x, x^2)$ を通るので，接線の方程式を (X, Y) 座標で表すと，

$$Y-x^2=2x(X-x)$$

$$Y=2xX-x^2$$

となり，判別式で求めた方法と同じになる．

さて，ここではルート2を計算することが主目的であった．ルート2を求める場合は，2次関数

$$y=x^2-2$$

を使う．元の2次関数を y 軸方向にマイナス2だけずらしたものである．そして，この2次関数の接線の方程式を求める．導関数が使えるので計算が楽である．接線の方程式は一般に

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

であるから，この式に $f(x)=(x-2)^2$ と $f'(x)=2x$ を代入すると

$$Y-(x^2-2)=2x(X-x)$$

となり，これを整理すると，

$$Y=2xX-x^2-2$$

となる．

さて，この接線の方程式が X 軸を切るとき，つまり $Y=0$ のときの値を求めてみよう．

$$X=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

右辺において，いま仮に $x=x_1$ とする．この値を上式の右辺に代入して計算された値を $X=x_2$ とすると，

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)$$

のような漸化式ができる．x_1 の初期値としてたとえば $x_1=1$ を設定する．この値を上式に代入して x_2 を計算する．そこでつぎの x_1 の候補として今，計算した x_2 の値と入れ変える．このような操作を何回か繰り返せば，ルート2を筆算で求めることができる．

表1では3回の繰り返し計算で1.414215となり小数点以下5桁まで値が求まっていることになる．この方法は微分法を考え出したニュートンの名前をとってニュートン・ラプソン法と呼ばれている．

計算回数	x_1	x_2
1	1	$\frac{3}{2}=1.5$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}=1.416$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}=1.414215$

表1．漸化式によるルート2の計算

BASICやC言語のプログラムでルートを求めるときは，計算を打ち切る誤差として x_1 と x_2 の差の絶対値が ε（たとえば 10^{-7}）以下になるときなどと設定しておけばよい．

問4　ルート2の計算方法を使ってルート5の値を小数点以下3桁まで求めよ．

ルートを計算するためにパソコンではSQRTまたはSQRなどの組込み関数がある．電卓ではルート記号（$\sqrt{\ }$）のついたボタンがある．どちらも，ニュートン・ラプソン法による繰り返し計算が行われていて，パソコンや電卓の中に，ルートのデータがあらかじめ用意されているのではない．

パソコンも電卓もずいぶん性能がよくなったものだ．1960年代～1970年代初めは，パソコンはなかったし，電卓も高価で技術は発展途上にあった．四則演算とルートの計算に時間の差があり，それを目で確認することができた．足し算や引き算はEnterキーを押すと一瞬にして答えが表示されたが，ルート計算は数秒かかった．すぐに結果が出るルートと計算に時間がかかるルートがあった．一生懸命計算している電卓を眺めながら，いまこのあたりの繰り返し計算をしているのだなと思える古きよき時代であった．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

2次元ベクトル解析と循環

中村英樹

「川」というものを見ていると，いつも同じ様に流れている．しかし，鴨長明の『方丈記』を読むまでもなく，ある時の流れはそれ以前の流れとは違う．勿論，此の際のその“川の流れ”の違いとは，「流れ」そのものの違いではなく（──流れは随時同じである：大雨や干伐にでもならない限り），「水分子（の集団）」そのものの，即ち，identificationの，違いのことである．水分子は入れ代わり立ち代わりで流れ続けるのではあるが，川の流れの形状はいつも同じである．identificationを問わない，としたとき，その「川の流れ」は物理現象として捉えられることになる．しかも，底が非常に浅くて平らであればある程に，それは，（2次元）**平面上の流れ**として扱い得る．そういう前提で，⑳では，**正則な流速ベクトル**という“ベクトル場”を，ある領域 D で微分可能な複素関数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ $(z=x+yi)$ の実部と虚部によって定義した：

$$(*)\quad \boldsymbol{W}_D=\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}_D=\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}_D.\quad（此処では D を添えることにする．）$$

そして此の様な $\boldsymbol{W}_D$ が D において2点A, Bを結ぶ区分的に滑らかな単一曲線：PS単一曲線 $\Gamma=\Gamma(s)$（s はAからBに向かっての曲線の長さ）を切って流れるその流量 Q は

$$Q=\int_\Gamma \boldsymbol{W}_D\cdot\boldsymbol{n}\,ds=\int_\Gamma \operatorname{grad} u\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

（$\boldsymbol{n}$ は $\Gamma=\Gamma(s)$ の各点での単位法線ベクトル）

$$=\int_\Gamma \operatorname{grad} v\cdot\boldsymbol{t}\,ds=v(\mathrm{B})-v(\mathrm{A})$$

（$\boldsymbol{t}$ は $\Gamma=\Gamma(s)$ の各点での単位接線ベクトル）

で与えられることを示した．これに関連して，もし D が単連結領域で，その中に含まれる Γ がPS単一閉曲線 C なら $Q=0$ となる．（C は D の周上であってもよい．）これは，軽薄でない，正確な陳述である．

Sec. 1　2次元発散と回転

ある領域 D で微分可能な関数 $f(z)=u+vi$ $(z\in D)$ の実部 u と虚部 v は，コーシー・リーマンの方程式を介してラプラスの方程式 $\Delta u=0$，$\Delta v=0$ を満たすことについては既に示した通りである．これらは D において各々

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

と表記されるが，$(*)$ を介して $\boldsymbol{W}_D=\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}_D$ の成分で表すと，

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0,\quad -\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)=0$$

となる．そこで，上式の

第1式の左辺を　$\operatorname{div}\boldsymbol{W}_D$　（divergence　**発散**），

第2式の左辺を　$-(\operatorname{rot}\boldsymbol{W}_D)_3$　（rotation　**回転**）

で表すと，$\boldsymbol{W}_D$ の方程式は $\operatorname{div}\boldsymbol{W}_D=0$，$(\operatorname{rot}\boldsymbol{W}_D)_3=0$ ということになる．rot $\boldsymbol{W}_D$ に