



西山 豊

数学を楽しむ

図形の消滅

1. 消える正方形の小片

かれこれ20年近くになるが、毎年ゼミの時間で学生たちに紹介している数学パズルがある。私としてはこのパズルの仕組みを熟知しているので新鮮さに欠けるが、初めて知る学生はやはり感動するらしい。これから紹介するパズルは現象を見て驚く、そして同じものを作ってみたくなる、さらにトリックの理由を数学的に解き明かしてみたくなるという数学教育の教材としては三拍子そろったものである。

まずパズルを誌上で紹介しよう。図1①のように、机の上に切り刻まれたトランプの裏側がある。学生の一人に助手になってもらい、これをジグソーパズルのように絵柄をそろえてもらう(同図②)。小片は全部で5個ある。台形が2つと、直角三角形、長方形、正方形が1つずつである。数が少ないのでトランプの裏側がすぐ完成する。そろったことを確認してもらった後、最初の①のように裏側のままバラバラにしよう。

そして、5個の小片をその位置で表側に向けてもらう(同図③)。この時点でトランプがダイヤのキングであったことがわかる。そこで先ほどと同じように、この5個の小片をそろえてもらうことにする。トランプの表の絵柄はそろおうが、正方形の小片が残ってしまう(同図④)。どうして残るのだろうか、考えようというパズルである。

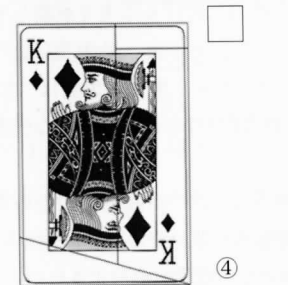
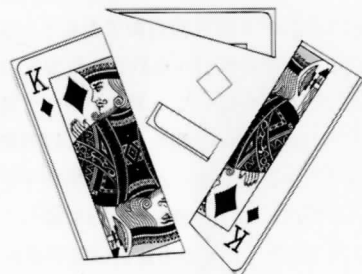
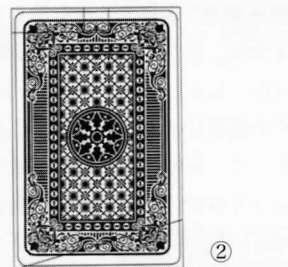


図1. 消える小片

2. パズルの作り方

この現象を見て、ほとんどの学生は驚く。そこで私は、これは手品でもマジックでもないで種や仕掛けを隠すことはない、すべてをオープンにするので理由を考えて欲しいと説明する。そして、これと同じもの

を作ってみようということになる。

学生たちには図2のようなトランプの絵柄を印刷したものと、絵柄を貼り付ける台紙(厚めの画用紙)を配る。作成年トランプの図は適当な大きさに拡大コピーすること。縦15センチ、横10センチくらいの大きさがいいであろう。

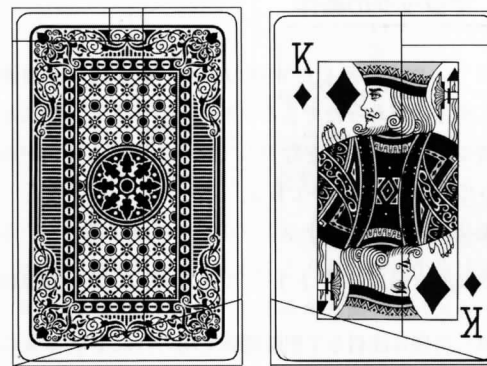


図2 作成用トランプ

台紙を作成するにはトランプの絵柄を利用すると便利である。まず、台紙の上にトランプの裏側の図を乗せる(図3)。縦横の線の格子点となる点をコンパスの針かボールペンで強く押さえて印をつける。格子点の数はぜんぶで11個ある。印をつけ終わると絵柄をどけて印をつけた点どうしを結び線を引く。すると台紙ができあがる(同図右)。

図2の作成用トランプ(裏、表)の薄い紙、図3で作成した台紙の厚い紙をハサミで切り離す。切り離した小片の数は $5 \times 3 = 15$ の全部で15個になる。この小片を台紙の上にのりづけしていくが、薄い紙は伸びやすいので台紙にノリをつけるほうがいようだ。またのりづけで紙がそりやすくなるので、平坦になるようにしておくこと。こうしてパズル用のトランプが完成する。

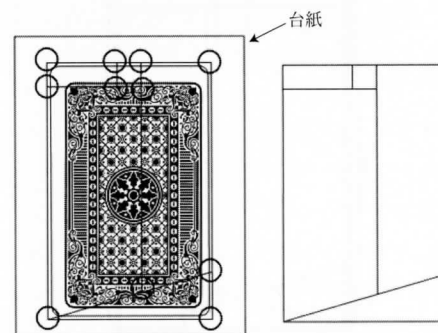


図3. 11個の格子点

3. 理由を考える

のりが乾いて使えるようになったら、学生2人ずつ組み合わせて、さきほど私と助手が会話したようなことをやらせる。このパズルのいいところは絵柄をそろえる作業を、すべて相手にやらせるところだ。種や仕掛けを隠しているという疑いがなくなるのだ。

2, 3回の試行錯誤を繰り返しているうちに、ある学生は「わかった!」と叫ぶ。裏側で完成した状態(図1②)をそのまま裏返すと表の絵柄がそろっていない。これが理由だという。私は、そこで、それは現象を言っているにすぎない。確かに左右の台形の小片を入れ替えている。では入れ替えるとどうして面積が増えたり減ったりするのだろうか。それを考えなさいと学生に言う。すると学生はおとなしくなる。

文科系大学生は、数学をほとんどやらずに大学に入ってくる。この数学パズルは中学の幾何の知識があれば充分、理解できるものである、と説明した後、考えるためのヒントとして私は図4のような寸法図をホワイトボードに描く。

これはトランプの裏の寸法である。縦が10センチ、横が7センチのトランプと考えてよい。2つの台形の底辺の1辺はそれぞれ9センチと8センチ、長方形は縦が1センチで横が3センチ、直角三角形は底辺が7センチで高さが2センチである。図4では長さが明記されていない辺があるが、それを計算することが問題を解くカギとなる。パズルは考えることが大切なので、計算例は最後に示すこととする。読者はチャレンジしてください。

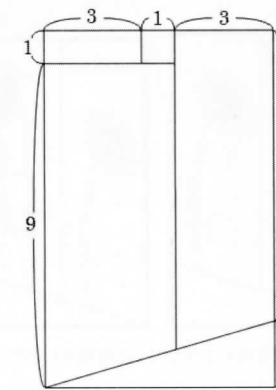


図4. 裏の寸法

4. 太陽を向くひまわり

私がこの数学パズルを知ったのは1987年で今から20年も前のことである。NHK テレビを見ていたところイギリスのBBC放送からの映像でポール・ダニエルズ・マジックショーという輸入番組が放映されていた。なんとなくテレビを見ていたところこのパズルに引き込まれてしまったということだ。そしてあわててビデオ録画のボタンを押して映像を記録したのを覚えている。

その頃、朝日新聞の日曜版に坂根巖夫の「遊びの博物誌」という紙面があり、玩具やパズルの楽しい連載記事の中にこのパズルが取り上げられていた。朝日新聞にはトランプの絵柄ではなく近藤博氏の作品で「太陽を向くヒマワリ」というものであった⁽¹⁾。図5がそれぞれ小片の数はトランプと同じ5個である。2つの台形にはヒマワリが、正方形の小片には太陽が描かれている。図5左のように太陽が出ている間は、ヒマワリは太陽の方を向いているが、太陽が沈む(正方形をどける)とヒマワリは勝手な方向を向く(同図右)というものだ。

トランプの図柄よりストーリー性があるがなかなか楽しいパズルになっている。また、高校の数学教育の集会で、ある先生が別の図柄を紹介されていた。それは「UFOを眺める兄弟」というのであった。夜空を伸のよい兄弟が見つめている。「あっ、UFOだ!」と弟が指をさす。その先にはUFOの小片(正方形)があり、兄もUFOの方を見る。ところが、UFOはさっといなくなる。つまり正方形の小片がなくなると、兄弟は「UFOはどこへ行ったのだろうか?」と別々の方向を向いて行方を探すということになっている。

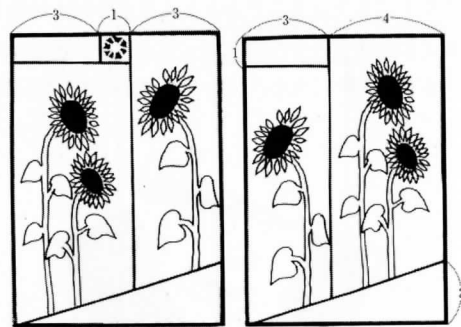


図5. 太陽を向くヒマワリ(近藤博さんの作品)⁽¹⁾

なかなかロマンがあっていいではないか。読者もまた、違う物語を考案さればどうだろうか。さて、「太

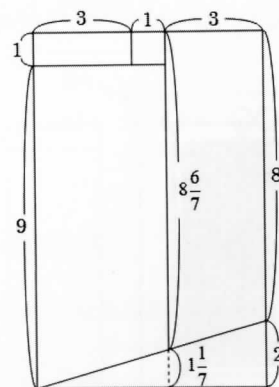
陽を向くヒマワリ」も「UFOを眺める兄弟」も、図柄は表に向けたままで左右の台形を入れ替えることになっている。トランプの場合は全体を裏返して左右を入れ替えているが、数学の問題として解く場合は、これら3つは同じである。

5. マジックの条件

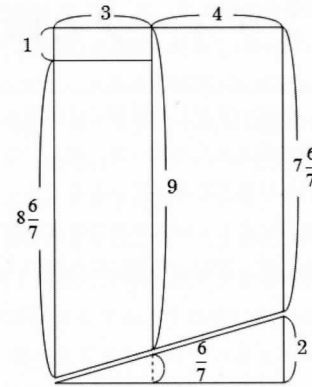
さて、図4に示した寸法のヒントから図形が消滅する理由はわかったであろうか。ヒントとした寸法から残るすべての長さを計算していくと自ずと理由がわかってくるというものである。

結果から言うと、トランプの裏の状態では隠れている長さは縦方向に $8\frac{6}{7}$ と $1\frac{1}{7}$ である(図6①)。計算は直角三角形に注目して相似関係を用いれば $1\frac{1}{7}$ が先に求まる。中学の幾何の知識で十分なので各自確かめること。これらを合計すると10になり左右両端の長さとも一致する。2つの台形を左右慎重に入れ替えるとトランプの表の状態になる(同図②)。慎重にということは、移動しない直角三角形と長方形の小片が動かないようにということだ。

台形の左右入れ替えによって、横幅は移動前の7センチで変化がないが、縦幅はわずかに短くなっている。移動前の10センチから移動後の $9\frac{6}{7}$ センチにわずかに短くなっている。 $\frac{1}{7}$ センチだから誰も気付かない。さらに直角三角形の勾配と台形の勾配が一致しているので、このラインを揃えようとして隙間を自然と埋めてしまっているのだ。



① 裏



② 表 (平行四辺形のすき間ができる)
図6

面積の増減を計算しておこう。正方形の小片は縦が1センチ、横が1センチであるから面積は $1 \times 1 = 1$ の1平方センチである。隙間はよく見ると細長い平行四辺形となっている。平行四辺形を強調するため隙間を赤色で色づけしてみよう。この平行四辺形は底辺が $\frac{1}{7}$ センチ、高さが7センチの実に細長い平行四辺形であることになる。平行四辺形の面積は底辺×高さであるから、 $\frac{1}{7} \times 7 = 1$ で1平方センチとなる。

これで正方形の小片と平行四辺形の面積が同じであることがわかった。正方形の小片は平行四辺形に形を変えていたのだ。自然界にエネルギー保存則があって、エネルギーを永遠に造り出す永久機関がないのと同じように、面積が増えたり減ったりすることは決してないのだ。

このパズルの寸法を図4に示したが、この寸法どおりに作成する必要はない。そこでマジックが成立する条件を変数にして図7に示しておこう。正方形の小片

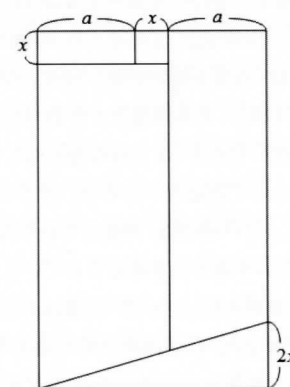


図7. マジックの条件

は1辺が x センチ、長方形は縦が x センチで横が a センチ、直角三角形は高さが $2x$ センチであればよい。トランプの縦の長さはマジックに関係しない。このようにすると、底辺が $x^2/(2a+x)$ 高さが $2a+x$ の平行四辺形のすき間ができることになる。この図において $x \rightarrow 0$ とすれば2つの台形が合同な長方形になり、全体としてつじつまが合う。

最後に、このマジックにはもうひとつ工夫がしてある。それはカードの形である。本当のトランプは、四隅は丸くコーナーカットされている。ところがコーナーカットすると、カードを裏返して左右を入れ替えるとトリックがばれてしまう。カードの形状は角張っているが、トランプの図柄でコーナーは丸いですよと表現している。ここまで読み取れた読者はマジシャンとしての素質があるのでは、と思う。

参考文献

- (1) 坂根巖夫『新・遊びの博物誌』朝日新聞社、1986年

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

