$+B\sin\omega t$ の形をとる．此処に ω は時刻 t の逆次元をもった正の未定定数であるが，これは，微分方程式より直ちに $\omega=\sqrt{k/m}$．そして初期条件より $A=x_0$, $B=0$．故に

$$x=x_0\cos\omega t.$$

現象を無視して単なる微分方程式の問題として解くなら，以下のようにやればよい．

2) 巾（べき）級数解として求める路線

これはニュートンもよく用いた手法である．

$$x=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+\cdots$$

と形式的に級数で表されたとする．これを微分方程式に代入すると，

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,na_nt^{n-2}=-\frac{k}{m}\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n.$$

これより

$$(n+1)(n+2)\,a_{n+2}=-\frac{k}{m}a_n.$$

これを $a_0=x_0$, $a_1=0$ の下で解けばよい（**読者の演習**）．結果は

$$x=x_0\sum_{n=0,2,4,\cdots}\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)^n.$$

多少，遠回りをしてもよいから，**将来性に通じる路線**を，というなら，以下のようなものを呈示致そう．

3) 演算子法による路線

元の微分方程式を次のように表す：

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)x=0\quad\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

これ即ち，(i を虚数単位として)

$$\left(\frac{d}{dt}+i\omega\right)\left(\frac{d}{dt}-i\omega\right)x=0.$$

$(d/dt-i\omega)x=y$ と置くことで

$$\frac{dy}{dt}=-i\omega y.$$

定数 0 の解はないから，これは

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt=-i\omega t$$

となり，従って $y=Ce^{-i\omega t}$ （C は 0 でない定数)．それ故，原方程式は

$$\left(\frac{d}{dt}-i\omega\right)x=Ce^{-i\omega t}.$$

(此処で $x=Ae^{-i\omega t}+Be^{+i\omega t}$ として解を求めることもできるが，これでは最初の路線と，事実上，同じになってしまうので，此の路線はとらないことにする.)

いま，$d/dt=D$, $i\omega=a$ と表記して，上式を $(D-a)x=Ce^{-at}$ と表そう．$x=e^{at}\cdot e^{-at}x$ であるから，

$$(D-a)x=e^{at}D(e^{-at}x)=Ce^{-at}$$

ということになる．従って

$$x=\frac{1}{D-a}(Ce^{-at})=e^{at}\frac{1}{D}(Ce^{-2at})$$
$$=e^{at}C\int e^{-2at}dt=C\left(-\frac{1}{2a}e^{-at}+C'e^{at}\right)$$

(C' は積分定数)．

初期条件より

$$C=-ax_0,\quad C'=-\frac{1}{2a}.$$

そして**オイラー(Euler)の公式**

$e^{\pm i\omega t}=\cos\omega t\pm i\sin\omega t$ (複号同順)により

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

以上で，「フムフム」と思うのは人の常．「1)～3)は本当にそれでよいのか？」，と思う人は鋭い評定眼をもった稀少な人間である（――こうした人間が多いと，「まやかし（の指導)」などが繁盛できるものではないのだが）．

1)～3)の各々，(分別なくやるなら，)少なからず難点がある．

1)と2)は，(＊)を微分方程式として**解いてはいない**．単に帰納的に解の形を外から当てがっただけである．しかも，2)は，それだけでは，得られた級数解が収束するかどうかすら不明である．

3)は，(＊)を解析的に解いてはいる．(これは，ニュートンの時代には無理である．)しかし，**虚数を用いたにも拘らず，実解析の計算をそのまま横流ししている**，というその**危険度**を認識していないなら，問題である．

結果はどれも正しい．しかし，これは，結果が判明しきっていることだから，一応，大目に見れるのであって，**未判明問題になるや，そのようなやり方は通用しなくなる**，ということを強調しておきたい．

(なかむら　ひでき)

西山　豊

数学を楽しむ

最速降下問題

1. どの経路が速く到達するか

図1のように傾斜面がある．玉がAからBまで転がるとき最短時間であるのはどの曲線であろうか．今仮に経路を直線，2次関数，サイクロイドとしよう．AとBを結ぶ最短経路は直線であるので直線がもっとも速く到達するかと思えるが意外と遅い．玉が速く転がるために最初の段階で加速するようにいったん下方に経路をとるほうがよい．直線より2次関数の方が速く到達する．しかし，次数をあげていくと今度は水平方向の速度が遅くなってしまう．

この問題はガリレオ（1564－1642）が最初に提示したと言われている．そしてサイクロイドが最速降下曲線であることが知られている．今回は物理では変分法といわれる分野の問題をあつかい，サイクロイド曲線の魅力ある性質を紹介しよう．

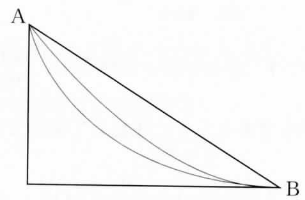

図1．どの経路が最短時間？

2. 数値計算と模型の作成

曲線の形を解析的に求める前に，問題の概略を知るために数値計算をしてみよう．私はパソコンの表計算ソフトでいくつかの曲線について到達時間を計算させてみた．図2のように座標軸をとり，高さが y_0 の地点から玉を転がすことにする．玉に働く力は重力 mg だけであるから，位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であるエネルギー保存則から，高さが y の時の速度 v は次のように求まる．

$$mgy_0=\frac{1}{2}mv^2+mgy \tag{2.1}$$

$$v=\sqrt{2g(y_0-y)} \tag{2.2}$$

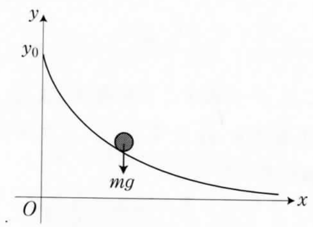

図2　外力は重力のみ

曲線の形を固定すると微小区間での距離 ds が求まり，距離 ds を速さ v で割ると微小時間 dt が求まる．このような微小時間 dt を積分すれば到達時間になる．

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{2.3}$$

$$dt=\frac{ds}{v} \tag{2.4}$$

$$T=\int dt \tag{2.5}$$

数値データとしては縦2メートル横 π（＝3.14）メートルのモデルで，曲線の刻みを100等分とした．その結果，到達時間は直線が1.189秒，2次関数が1.046秒，3次関数が1.019秒，楕円が1.007秒，サイクロイドが1.003秒となった．直線が一番遅く，サイクロイドが一番速かった．楕円とサイクロイドの差は0.004秒とわずかであった．

パソコンで到達時間を確認したが実感がわかないので，私は実際に模型を作ってみたくなった．大きなものを作りたいが，製作費用と保管を考えて縮小モデルを考えた．DIY店で縦横が30センチ×45センチのシナ合板が見つかった．板の厚さは1.2センチでパチンコ玉の直径が1.1センチなので充分な厚みであった．

パソコンでは直線が0.445秒，2次関数が0.391秒，サイクロイドが0.375秒であり，実際に実験してみると，サイクロイドと直線の違いは明らかだったが，サイクロイドと2次関数の違いは相当慎重にしなければならなかった．到達時間の差はパチンコ玉1個分である．

3. 変分法と汎関数

以上は曲線の形が分かった上での数値計算であるが，曲線の形がわからない場合の，到達時間を最小にする問題を考えてみよう．

A, B はスタート地点と到達地点とする．スタート地点の時刻 t_A から到達時刻の t_B までを積分したのが到達時間 T である．

$$T=\int_{t}^{t} dt \qquad (3.1)$$

この dt を x, y, y' で表すことを検討しよう．

曲線の微小要素を ds とすると，ピタゴラスの定理から次の関係が成り立つ．

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (3.2)$$

玉の速度 v は曲線の上で距離を時間で微分すればよいから，次のように書ける．

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dx}\frac{dx}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{dx}{dt} \qquad (3.3)$$

式(3.2)(3.3)を使うと，式(3.1)は次のように書きかえられる．

$$\begin{aligned}T&=\int_{t}^{t} dt=\int_{x}^{x}\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}dx\\&=\int_0^x\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v}dx\end{aligned} \qquad (3.4)$$

y 座標を下方に取ると，落ちた距離 y と速度 v の間にはエネルギー保存則から，

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy \qquad (3.5)$$

が成り立ち，これを変形すると

$$v=\sqrt{2gy} \qquad (3.6)$$

となる．これを式(3.4)に代入し，$\dfrac{dy}{dx}=y'$ と表記すると次のようになる．

$$T=\int_0^x\sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx \qquad (3.7)$$

この式において T を最小にするにはどうすればよいのだろうか．それは，被積分関数

$$L(x,\ y,\ y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} \qquad (3.8)$$

をどのように決めれば T が最小になるかという変分法の問題となる．

4. オイラー–ラグランジュ方程式

ここで，$L(x,\ y,\ y')$ を与えられた関数として積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2}L(x,\ y,\ y')\,dx \qquad (4.1)$$

が極値となるように関数 $y(x)$ を定める問題を考えてみよう．I を汎関数とよぶ．普通の関数に対して，「関数の関数」の意味を示している．求める関数 $y(x)$ から少し変位させた関数として

$$Y(x)=y(x)+\varepsilon\delta(x) \qquad (4.2)$$

をとり，積分

$$I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2}L(x,\ Y,\ Y')\,dx \qquad (4.3)$$

が極値となる条件

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0 \qquad (4.4)$$

を考える．Y, Y' がともに ε に依存し，$\dfrac{dY}{d\varepsilon}=\delta(x)$，$\dfrac{dY'}{d\varepsilon}=\delta'(x)$ であることに注意して微分を実行すると

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left.\left(\frac{\partial L}{\partial Y}\delta(x)+\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)\right)\right|_{\varepsilon=0}dx \qquad (4.5)$$

右辺第2項を部分積分すると

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta'(x)\,dx&=\left.\frac{\partial L}{\partial Y'}\delta(x)\right|_{x_1}^{x_2}\\&-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial Y'}\right)\delta(x)\,dx\end{aligned} \qquad (4.6)$$

である．x_1, x_2 において $\delta(x)=0$ であるから，この式の右辺第1項はゼロである．よって極値条件は

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta(x)\,dx=0 \qquad (4.7)$$

となる．$\delta(x)$ は任意であるから，$y(x)$ を決める条件として

$$\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=0 \qquad (4.8)$$

を得る．この式をオイラー方程式またはオイラー–ラグランジュ方程式という．変分法は，屈折率の違う媒質の中を光が通過するときどのような経路をたどるかというフェルマーの原理に由来がある．通過する時間を最小にするように経路が選ばれるという変分原理が働いている．

5. オイラー方程式を解く

さて，$L=\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$ をオイラー–ラグランジュの方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right)=0$ に代入すればよいが，L には x が陽に含まれていない．つまり y と y' だけの関数になっている．これにはオイラー方程式を変形したつぎの公式が使える．

$$L-y'\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)=C \qquad (5.1)$$

これに L を代入すると，

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}-y'\left(\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C\end{aligned} \qquad (5.2)$$

両辺を自乗すると次の形に整理できる．右辺は定数なので $2A$ と置く．

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{2gC^2}=2A \qquad (5.3)$$

式(5.3)を次のように変形する．

$$y'=\sqrt{\frac{2A-y}{y}} \qquad (5.4)$$

曲線の定義域として

$$2A\geqq y\geqq 0 \qquad (5.5)$$

とする．また，初期条件として $\theta=0$ のとき $y=0$ とする．このとき y を次のようにパラメータ表示で変数変換する．

$$y=A-A\cos\theta \qquad (5.6)$$

この変数変換(5.6)はやや唐突である．変分法によって関数の形が求まるというよりか，サイクロイドの研究がずいぶん以前から進められていて最速降下曲線であることもわかっていた．そこで，この曲線を仮定して変分法で解を求めたと理解すればよい．

式(5.6)の両辺を微分すれば次のようになる．

$$dy=A\sin\theta\,d\theta=2A\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \qquad (5.7)$$

この y のパラメータ表示を使うと式(5.7)は次のように書き直すことができる．

$$\begin{aligned}y'&=\sqrt{\frac{2A-y}{y}}=\sqrt{\frac{A+A\cos\theta}{A-A\cos\theta}}\\&=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned} \qquad (5.8)$$

両辺に dx を掛けて，次のように書いておく．

$$dy=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}dx \qquad (5.9)$$

式(5.7)と式(5.9)を連立して，dy を消去すれば x と θ の関係式を求めることができる．

$$dx=2A\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=A(1-\cos\theta)\,d\theta \qquad (5.10)$$

両辺を積分して

$$x=A(\theta-\sin\theta)+D \qquad (5.11)$$

初期条件として $\theta=0$ のとき $x=0$ とすれば積分定数は $D=0$ となる．結局，最速降下曲線の方程式はパラメータ表示では次のようになる．

$$x=A(\theta-\sin\theta) \qquad (5.12)$$
$$y=A(1-\cos\theta) \qquad (5.13)$$

6. サイクロイド

サイクロイドの式は半径 a の円が直線上を転がるときに，円周上の定点の軌跡として表される．円の回転角度を θ とするとき，曲線上の座標は次のようになる．

$$x=a(\theta-\sin\theta) \qquad (6.1)$$
$$y=a(1-\cos\theta) \qquad (6.2)$$

そして，導関数は

$\dfrac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$，$\dfrac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$ となり，

$\cos\theta=1-\dfrac{y}{a}$ に注意すると

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(dy/d\theta)^2}{(dx/d\theta)^2}=\frac{2a-y}{y} \qquad (6.3)$$

が導かれる．これがサイクロイドの微分方程式で前述の(5.4)式と一致することに注意すること．

高校数学の教科書では，サイクロイドは自転車の輪の1点が運動する軌跡であるといった程度の紹介で終わっていることが多い．サイクロイドのすぐれた性質である最速降下曲線の説明がされることは少なく残念である．

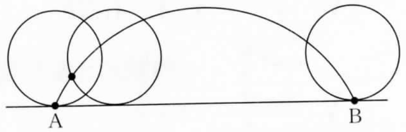

図3．サイクロイド

7. 等時性

振り子の等時性はガリレオが発見した．振り子の長さを l，重力定数を g，振り子のつりあいの位置を原点にとり，振れの角度を θ とすると，振り子の運動方程式は次式で表される．

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{7.1}$$

振れの角度が小さいとき $\sin\theta \approx \theta$ を仮定すると，式は次のように簡単になり

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \tag{7.2}$$

周期 T は次式となる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7.3}$$

サイクロイドは最速降下曲線であることを説明したが，もうひとつの優れた性質，等時性がある．図4のように玉をAから転がしても，途中のCから転がしてもB点に到達するのは同じ時刻である．

[問1] サイクロイド曲線上では，玉が転がる位置が違っても最下点に到達する時刻は同じであることを証明せよ．

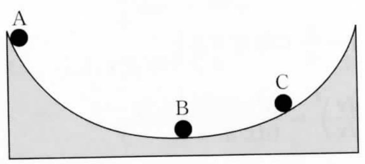

図4．サイクロイドの等時性

ガリレオの振り子は振れが大きくなると，等時性はくずれて周期が長くなる．サイクロイドの上を振り子が行き来するならば等時性が実現できるはずである．ホイヘンス（1629 – 1695）はつぎのようにして等時性の振り子を実現した．図5のようにサイクロイドを2つ（$0 \leqq \theta \leqq 4\pi$）描く．$B$ 点を中心にして長さ $4a$（サイクロイドの曲線の長さは $8a$）のひもを D 点から引っ張りながら開いていくとき，その軌跡 P はサイクロイドになる．このような曲線を伸開線（しんかいせん）と呼ぶ．

[問2] サイクロイドの伸開線はサイクロイドになることを証明せよ．

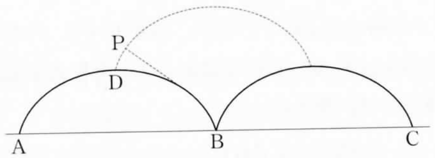

図5．サイクロイドの伸開線はサイクロイド

図5を上下反転させ中央の半分を切り取ったものがホイヘンスの考えたサイクロイド振り子である（図6）．これによると振れが大きくても等時性が保たれ，この原理が応用された時計はガリレオの時計より精度が増したのである．振り子の長さ l はサイクロイドの半周期分の長さ $4a$ であり，周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4a}{g}} \tag{7.4}$$

である．

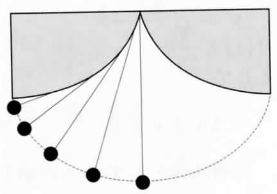

図6．ホイヘンスの振り子

(参考文献)
高桑昇一郎『微分方程式と変分法』共立出版，2003年

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

山下純一

グロタンディークと修羅(3)

神に思いを馳せるその瞬間に
例外なしにすべてを放棄しなかった者は，
自分の偶像のひとつに
神の名を与えているのである．
—— シモーヌ・ヴェイユ[1] (p.324)

若き日のグロタンディーク
http://www.grothendieckcircle.org/ より

1990年1月26日にグロタンディーク[2]は，第2次隠遁中にモルモワロンのレ・ゾメットで，非常に注目すべき手紙を書いた．約250名の知人に向けられたものだった．グロタンディーク関係の資料をデジタル化して集めたインターネットのホームページ「グロタンディーク・サークル」[3]には，この極めて興味深い手紙が収録されていない（2007年6月8日現在）．穿った見方をすれば，突然「福音」を宣言し神の降臨を「予言」（「預言」？）したグロタンディークに戸惑い，「グロタンディーク発狂説」を支持する材料となることに怯えつつ，ホームページではとりあえず「隠蔽」あるいは「公表保留」の決定を下したということだろうか．ぼくは，パウロなどによってイエスの死後に創作された物語（イエスをキリスト＝メシアだとする）を核とするキリスト教（たとえば神の概念）にはさまざまな欠点があると感じており，神は脳の妄想（デリュージョン）にすぎないとするリチャード・ドーキンス（1941-）の無神論的見解[4]にむしろ魅かれている．さらにまた，グロタンディークが宗教的な用語を使って書いていることの意味を解読することが必要だとも考えているが，とりあえずここでは，グロタンディークのテキストをなるべくデフォルメせずに伝達したいと思っている．グロタンディークの行為の内に潜むスピリチュアリティの熱気あるいは「永遠のいのち」への情熱の特異性を感じることのできる非常に重要な手紙なので，その内容を紹介しておきたくなったのだ．

突然の「福音」

この手紙の本文はタイトルの付けられた10個の節からなっている．それぞれの節の概要について順に眺めてみよう．（この手紙の「解読」作業を行なうにあたって，辻雄一による私的な翻訳が非常に役に立った．記して感謝の言葉としたい．）

第1節「新しい時代のためのあなたのミッション」（Votre mission pour le Nouvel Age）において，グロタンディークは，1996年10月14日を「真実の日」（Jour de Vérité）と呼び，この日以降を「新しい時代」（Nouvel Age）あるいは「解放の時代」（Age de la libération）と呼んでいる．そして，「新しい時代」のための『福音書』(le Livre de la Bonne Nouvelle) を1990年以内に書き上げようとしていた．この『福音書』が出版されれば，多くの人たちが「新しい時代」を生きるようになるだろうが，その前に，個人的に知っている何名かの人たちにあらかじめ知らせようとしてこの手紙を書いたのだった．「真実の日」を前にして〈神〉の特別なミッションを伝えようとする手紙でもある．このミッションを受け入れることで，〈神〉の助力によって，4つの事柄，「内的復活」（renouvellement intérieur）「内的ヴィジョン」（vision intérieure）「信念」（foi）「スピリチュアルな豊かさ」（fertilité spirituelle）が実現されるのだという．グロタンディークがキリスト教的な用語体系を「借用」していることは明らかだが，あとで紹介するようにグロタンディークがこころの中で呼びかけられた〈神〉は，通常とは異なり「女神」であったところが「女性性」重視の姿勢とも思われ，〈神〉を慈悲の象徴としようという試みかもしれないと感じて好感が持てた．

第2節「〈神〉の息吹」（Le Souffle de Dieu）は，予期しない手紙を手にした相手が驚くことを想定して書かれたものだ．この手紙をもらった人たちの大半は「福音の伝道」などというミッションはいかにも唐突に感じるはずだが，グロタンディークは「〈神〉の息吹」はこのように突然巻き起こるものだと述べ，グロタンディーク自身のそれまでの人生における人間関係はスピリチュアルなものではなかったが，〈神〉との出会いによって，自分の人生が「不毛な砂漠」（désert aride）から「花に満ちた庭園＝楽園」（jardin florissant）に変貌したことに触れて，その体験によって「グローバルなレベルで〈神〉が巻き起こそうとしている変化の巨大さを感じ取ることができる」と述