数学を楽しむ

円周率とマチンの公式

西山　豊

1. 円周率 1000 桁を求める

私は，1970 年代から 40 年近くコンピュータに関係した仕事や研究をしてきたが，円周率の計算にはほとんど関心がなかった．円周率を何桁まで計算させたかの日米の競争が続いたが，あれはスーパー・コンピューターを使える人だけの話で一般人には関係ないものだと思っていた．

最近になって，知人の木村良夫さんから『パソコンを遊ぶ簡単プログラミング』という楽しい本が贈られてきた[(1)]．第 8 章は円周率を計算する十進 BASIC の説明があり，これによると 50 行ほどのプログラムで円周率が 100 桁求まるというものであった．最近のパソコンは性能がよくなっている．円周率を 1000 桁ぐらいは簡単に計算できるのだ．

ここで使われているのはマチンの公式というものだった．

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

この公式はジョン・マチンが 1706 年に発見したもので，300 年ちかくの長い間使われてきた公式で，収束が速く円周率の計算に向いているといわれている．今回は，マチンの公式がどのようにして導入されたのか，そして，この公式をどのようにプログラミングするかについて考えてみよう．

2. アルキメデスの方法

円周率とは直径と円周の長さの比率のことで，小学校では 3.14 と学ぶ．実用的には有効桁が 3 桁で十分であるが，コンピュータの発達と数学の発展が協力し合って円周率の計算記録を異常なまでに更新してきた．まずはじめに，計算機が出現するまではどのような方法が取られてきたかをみてみよう．

古代ギリシャのアルキメデスは，円に外接する正多角形と，円に内接する正多角形を用いて円周率を計算した．円の半径を 1 とする ($OA = OB = 1$)．正 6 角形の場合は，内接正 6 角形と外接正 6 角形の周の長さはそれぞれ 6 と $4\sqrt{3}$ になり，$6 < 2\pi < 4\sqrt{3}$ より，$3 < \pi < 2\sqrt{3} \approx 3.464$ となる (図 1)．

正 12 角形の場合は，$OA = OB = OC = 1$ であり，$AB = a$，$AC = b$ とする．AB の中点を M として，$MC = x$ とおくと，三角形 OAM と三角形 ACM に関してピタゴラスの定理より，

$$1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (1-x)^2, \quad b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2$$

となる．これらを解いて，円周率は $\pi > 6b \approx 3.105$ となる (図 2)．

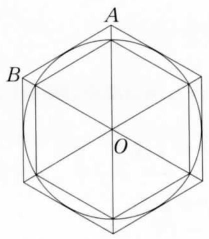

図 1．正 6 角形

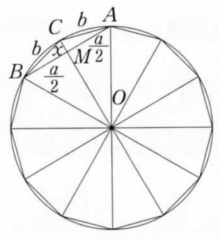

図 2．正 12 角形

正 24 角形から正 96 角形までについてもピタゴラスの定理を用いていけば計算できる．興味がある読者は確かめられたい．無理数を知らないギリシャ時代に，アルキメデスは正 96 角形を使って 3.14 を計算している．

3. グレゴリの公式

17 世紀までは，正多角形による評価の時代が続く．正多角形の辺を増やすだけの力ずくの計算では桁数が増えず，これを変革するのは微積分学の発展をまたねばならなかった．1671 年，スコットランドのグレゴリにより，グレゴリ級数が発見される．

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$$

これとは独立に 1674 年にライプニッツも同じ発見をしており，グレゴリ・ライプニッツ級数とも呼ばれる．この式に $x = 1$ を代入することによって

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

という級数が得られる．この級数の収束は極めて遅いが，部分和をとれば π の近似値を計算することもできる．

ここでグレゴリ級数がどのように導入されたかを見てみよう．グレゴリ級数は $\arctan(x)$ のテイラー展開であるから，テイラー展開について補足しておこう．テーラー展開とは，無限回微分可能な関数 $f(x)$ から，テイラー級数と呼ばれる冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

を得ることを言い，この級数がもとの関数 $f(x)$ に一致するとき，$f(x)$ はテイラー展開可能であると言う．$x = a$ の近傍で考えるものであり，$x = a$ におけるテイラー展開という．$a = 0$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

を特にマクローリン展開と呼ぶ．

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

この式の厳密的な証明は別の機会にゆずるとして，この式が成り立つことは，左辺と右辺を微分していくことによって直観的に正しいことが理解できるであろう．

tan (タンジェント) と arctan (アークタンジェント) の関係は，正接関数とその逆関数の関係であり，式で表現すると，

$$y = \tan x \ \left(ただし\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) と\ x = \tan^{-1} y$$

になる ($y = \arctan x$ と表記することもある)．

$$y = f(x) = \arctan x$$

とおくと明らかに，

$$f(0) = 0$$

ここで，$f^{(1)}(0)$ を計算するため arctan の微分を考えてみよう．そのままの微分は難しいので，

$$x = \tan y$$

として考える．x について微分すると左辺は 1，右辺は合成関数の微分であるから，

$$1 = (1 + \tan^2 y)\frac{dy}{dx}$$

となり，これを解いて 1 階微分が求まる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

そこで，

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

とおく．2 階微分，3 階微分は，この式からつぎのようになる．

$$f^{(2)}(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

これらの式に $x = 0$ を代入すると

$$f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -2$$

となる．これらをテイラー展開の項に代入していくとつぎのようになる．

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

4. マチンの公式

1706 年，イギリスのジョン・マチンが逆正接関数を用いた円周率の公式を発見したのは先に述べたとおりである．マチンの公式を再掲する．

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

マチンは，この公式にグレゴリ級数を用いて 100 桁までの円周率を求めた．ここでは，マチンの公式とグレゴリ級数の関係を説明しよう．

グレゴリ級数に $x = \frac{1}{5}$ または $x = \frac{1}{239}$ を代入することによって

$$\arctan\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots$$

$$\arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots$$

が得られる．これらをマチンの公式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \\
&= 4\times\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) \\
&\quad -\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

となる．これで円周率が計算されることになる．

さて，マチンの公式はどのような関係になっているかを見てみよう．この公式が成り立つことは，三角関数の加法定理を巧みに使うことで説明できる．tan の加法公式は高校数学の教科書に出てくる馴染みの式である．

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

この式で $\alpha = \beta$ とすると 2 倍角の公式が導かれる．

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

ここで $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ とすると $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ であり，2 倍角，4 倍角の正接は上記公式よりつぎのように求まる．

$$\tan 2\alpha = \frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}} = \frac{2\times 5\times 12}{12\times 12 - 5\times 5} = \frac{120}{119}$$

$\tan 4\alpha$ は $\frac{120}{119}$ でほとんど 1 に近く，その差は $\frac{1}{119}$ である．そこで 4α と $\frac{\pi}{4}$ の差の tan を計算すると，

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1}$$

$$= \frac{120-119}{119+120} = \frac{1}{239}$$

のように綺麗な形になる．この式から，

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

のようにしてマチンの公式が導かれることになる．

別の角度からマチンの公式を見てみよう．

$\tan\alpha = \frac{1}{5}$ から出発して， $\tan 2\alpha = \frac{5}{12}$ と $\tan 4\alpha = \frac{120}{119}$ を考えてきた．これらに対応する三角形があり，それを図 3 に示す．

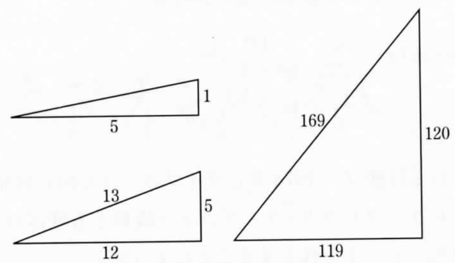

図 3．2 倍角，4 倍角の三角形

2 倍角の場合は辺が 12：5：13 であり，4 倍角の場合は辺が 119：120：169 であり，これらの辺には

$$13^2 = 12^2 + 5^2,\quad 169^2 = 119^2 + 120^2$$

のピタゴラスの定理の関係が成り立っている．

2 倍角と 4 倍角の三角形はともにピタゴラスの三角形と呼ばれるものである．ピタゴラスの三角形にはつぎの関係が成り立つ．

［定 理］ m, n が互いに素な自然数であるとき，$\tan\alpha = \frac{n}{m}$ $(m > n)$ であれば，1 つの鋭角が 2α である直角三角形はピタゴラスの三角形である．また，その 3 辺の長さの比は $m^2-n^2 : 2mn : m^2+n^2$ である．

この定理に $m = 5$，$n = 1$ を代入すると，

$$m^2-n^2 = 24,\quad 2mn = 10,\quad m^2+n^2 = 26$$

から 2 倍角の三角形の辺の長さの比

$$24 : 10 : 26 = 12 : 5 : 13$$

が計算され，$m = 12$，$n = 5$ を代入すると，

$$m^2-n^2 = 119,\quad 2mn = 120,\quad m^2+n^2 = 169$$

から 4 倍角の三角形の辺の長さの比が計算される．

マチンの公式は三角関数の加法定理から，tan の 2 倍角の公式，4 倍角の公式をじつに巧妙に使っている．受験の数学で加法定理や倍角の公式が何の役に立つのかと疑問に思う学生が多いかも知れないが，ここでは数学の財産が十二分に使われていることを記憶しておいて欲しい．

5. マチンの公式の周辺

以上，マチンの公式について説明したが，マチンの公式がどのようにして見つけられたのかの答えになっていないようだ．マチンの公式は偶然見つかったのだろうか，それとも数学理論にもとづき求められたのだろうか．

そこで，マチンのような公式が他にも存在するのか検討してみよう．a_k を正負の整数，b_k を正の整数として，つぎの級数を考える．

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n} a_k \arctan\frac{1}{b_k}$$

2 項で表されるものに次の公式が知られている．

(1) $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$

(2) $\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$

(3) $\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}$

(4) $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

(1) はオイラーが考えたもので，tangent の加法公式で証明できるので，読者は試してみること．受験参考書には図 4 のような問題をときどき見つけることができる．同図において

$$\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$$

を証明せよというものだが，このオリジナルは円周率計算のオイラーの式と関係しているようだ．

(4) がマチンの公式である．a_k や b_k の数字が小さいときは手計算で確認できるが，マチンの公式のように数字が大きいとお手上げである．今ならパソコンがあるので，プログラムを組んで総当り方式で調べる方法があるが，コンピュータのない 18 世紀にどうしてマチンの公式が発見されたのか疑問である．

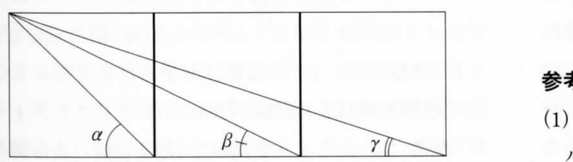

図 4．$\tan\alpha = \tan\beta + \tan\gamma$

項の数を増やして 3 項で表されるものに次のものがある．(6) はガウスの式である．

(5) $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$

(6) $\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57}$
$\quad -5\arctan\frac{1}{239}$

6. 高野喜久雄の公式

さて，マチンの公式に戻って，実際に計算することを考えてみよう．折角マチンの公式を知りながら，パソコンで円周率を有効桁の 7 桁しか計算できない人がいる．また，8 桁の電卓なら 8 桁しか計算できないと思っている人がいる．8 桁の電卓を使って，1000 桁の円周率を求めることは原理的に可能であるので，その方法を示そう．

1 ÷ 239 で説明しよう．便宜的に数を 3 桁ずつくぎることとする．

1 ÷ 239 = 0 余り 1
1000 ÷ 239 = 4 余り 44
44000 ÷ 239 = 184 余り 24
24000 ÷ 239 = 100 余り 100

そして，この商の部分を並べると答えになる．

0．004　184　100　…

最近の日米円周率計算競争についてだが，2002 年，金田康正が HITACHI SR8000 を用いて高野喜久雄の公式（1982 年発表）を使って 1 兆 2411 億桁まで計算した．高野喜久雄の公式については参考文献 (2) を参照のこと．この式はマチンの公式と比べると比較にならないほど複雑になっている．つぎつぎと新しい公式が発見されているがコンピュータの力を借りることが多い．しかし，コンピュータだけでは駄目で多くの数学公式が基礎になっている．

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}$$
$$+ 12\arctan\frac{1}{110443}$$

参考文献

(1) 木村良夫『パソコンを遊ぶ簡単プログラミング』講談社ブルーバックス，2003 年

(2) 高野喜久雄「π の arctangent relation を求めて」『b i t』vol. 14, no. 10, 397-405, 1983. 4

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）