数学を楽しむ

メビウスの帯で遊ぶ

西山　豊

1. B４の用紙を１枚

今回はメビウスの帯について話をしよう．メビウスの帯またはメビウスの輪として知られるものは位相幾何学（トポロジー）で議論されるが，一般の人にとってもとても示唆的なことがらを含んでいるので，私はゼミの時間に必ず取り上げることにしている．メビウスの帯についてご存じない読者はいちど試してみてください．

まず，B４のコピー用紙を一枚用意してください．たて257ミリ，横364ミリの大きさが一番よいことが経験的にわかっています．図１のように，これを６等分して細長い短冊を６本作ります．実験では６本使うということです．

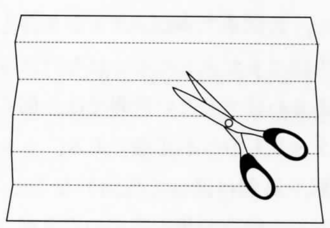
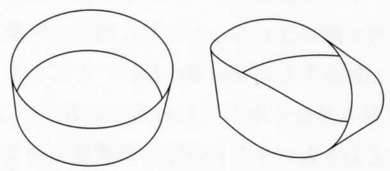


図１　B４の用紙を６等分

さあ，これからメビウスの帯を使って色々と実験してみましょう．まず，メビウスの帯をひとつ作ってください．メビウスの帯を知らない学生がいるので，普通の帯びはこのようにノリをつけるが，メビウスの帯は180度ひねってノリをつけると説明する（図２）．180度のひねり方は時計回りと反時計回りの２通り考えられるが，向きはどちらでもよい．帯を180度ひねってノリづけするだけで不思議な世界が開けてくるのだ．



(1)　　(2)

図２　普通の帯とメビウスの帯

メビウスの帯が正しくできたのを確認して，このメビウスの帯を半分に切ったらどうなるかを考えてみよう．最近の学生は考えずにすぐハサミで切りたがるので，ハサミを持つ学生は減点すると言っておく．学生に想像させる．２つに分かれるという予想が多い．じゃあ，ハサミで切ってみようということになる．意外や意外，メビウスの帯を切ると２つにわかれず，１本の大きな輪になるのである（図３）．メビウスの帯を知らなかった学生は驚く，また数学嫌いの若者を数学に目を向けさせる効果にも役立つ．

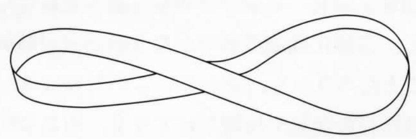
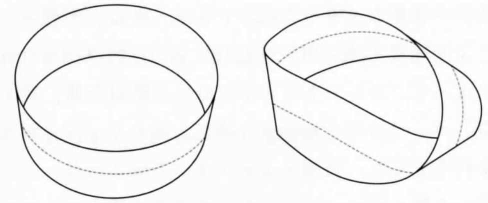


図３　メビウスの帯を２等分すると

２つに分かれると思った予想が大きくはずれたのだ．そこで，どうして２つにわかれずに１本の大きな輪になったのかを考えてみよう．普通の帯と，それを180度ひねったメビウスの帯との違いを知るために，普通の帯とメビウスの帯を作らせ，それぞれの帯びの上に鉛筆を走らせて見よう（図４）．普通の帯は外側に鉛筆を走らせると内側に行かないが，メビウスの帯は表側と裏側に鉛筆が走っていく．メビウスを始めて知る学生は，普通の帯と同じようになると思っているだけにこの現象に感動する．



(1)　　(2)

図４　鉛筆を走らせる

2. 180度の奇数倍と偶数倍

ここまでが，第一ラウンド．メビウスの帯を切ると１本の長い帯になることを知っている学生もいる．この話はつづきがある．では，いまできたこの帯（図３）を２等分するとどうなるだろうか．

学生たちに予想させる．今度は，さらに大きな一つの輪になるという予想が多い．前の結果に影響されやすい，というのが現代の若者の特徴なのだろうか．一人が大きな帯になるというと私もそう思うと答える．よく考えなさい．切ろうとしているのはメビウスの帯だろうかとヒントを与えるが，大きな帯びになって欲しいという願望の方が強いのか，それ以外の予想は少ない．結果は図５に示すように２つの帯びにわかれ，それらがリンクされている．ここでも学生の予想ははずれてしまう．

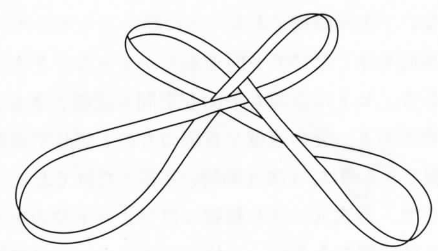


図５　さらに２等分すると

以上の結果を整理すると次のようになる．帯のひねりの度合いが特に重要であり，ひねっていない普通の帯は表と裏があるが，180度ひねってあるメビウスの帯は表と裏の区別がない“裏表のない曲面”となる．そして，180度の偶数倍（０度，360度，720度･･･）ひねった帯びは裏表のある帯に，180度の奇数倍（180度，540度，900度･･･）ひねった帯は裏表のない帯になる，と板書する．

このことを知っていたなら，図３の帯びは360度ひねってあるので，裏表があり，すくなくとも２つに分かれることは予想できたはずである．

3. メビウスの帯を３等分

新しくメビウスの帯をひとつ作ろう．そして，今度は３等分するとどうなるかを考えてみよう．予測するために鉛筆を走らせて見ることの意味が大きいので，学生にそれをさせる．おおよその３等分でよい．メビウスの帯の上に鉛筆を走らせていき裏側に来たとき，２等分のときのように真裏には来ない．線がずれているがそれを気にせずどんどん鉛筆を走らせ元の位置に戻ってくる．鉛筆の色を変えてもう１本の線を走らせる．このようにして３等分の状態を確認する．このままでは予想がつきにくいようだったら，図７のように帯に色を塗って色分けするのもいいだろう．真ん中の帯（白色）と，両端の帯（黒色と灰色）が違ったものになりそうである．そして黒色と灰色はつながっているのだ．

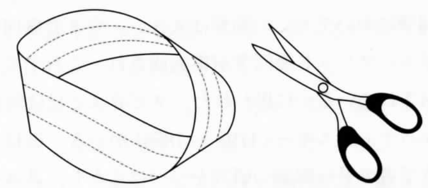


図６　メビウスの帯を３等分

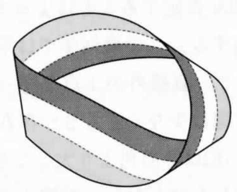


図７　色を塗る

メビウスの帯を３等分してみると小さな帯と大きな帯がリンクしたようになる（図８）．小さい帯はメビウスの帯である．大きい帯びは360度ひねった裏表のある帯となる．

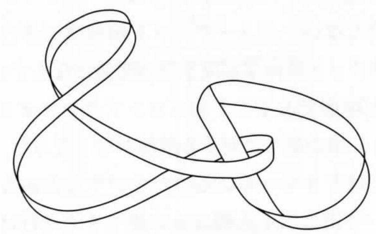


図８　長い帯と短い帯がリンク

4. 宇宙の構造を解くヒント

メビウスの帯は誰がどのような目的で考案したのだろうか．メビウス（A.F. Moebius, 1790～1868）は19世紀に活躍したドイツの数学者であり天文学者である．メビウスの帯は，彼が提唱したものでその名がついている．彼は天文学者でもあるので，宇宙の構造に興味があり，宇宙の果てはどうなっているのかといろいろ思いをめぐらしているうちに考案したものとされている．

少し時代が逆のぼるが，昔の人は大地が平面だと思っていた．そして誰も行ったことのない地の果てには崖縁があって墜落すると思っていた．地球が丸い事を証明したのはコロンブスである．彼は1492年，新大陸を発見した．その後，マゼラン（1480～1521）が最初の世界周航をし，これによって地球は球形であることを実証した．

幾何学においてもこの衝撃は大きい．今まで幾何学といえばユークリッド幾何学が集大成され，これですべてが完結されているかに思われた．メビウスとほぼ同世代人にロバチェフスキー（1792～1856）がいる．彼はロシアの数学者で平行線論の研究をつづけるうち，非ユークリッド幾何学の成立を確信し，その成果を発表した．

平行線の公理を否定することによって非ユークリッド幾何学が誕生する．この幾何学では平行線公理に代わって[平面上で，直線外の1点を通って，この直線と交わらない直線は少なくとも2つ存在する]，また，[三角形の内角の和は2直角より大となる]，さらに[直線は有限で閉じたものとなり，直線上の点の間の順序についてもユークリッド幾何学の場合と相違する性質がみられる]等がある．

たとえば，北極と赤道上の2点を結ぶ三角形NABを考えてみる．この場合は内角の和が2直角より大きくなる．ノートの上なら三角形の内角の和は2直角であるが，地球レベルの三角形ではユークリッド幾何学は成り立たない．非ユークリッド幾何学の中に局所的にユークリッド幾何学が成り立つ関係になっている．

地球が球形であることをコロンブスやマゼランが実証すると，地の果てに対する誤解がなくなった．一方，空の果てはどうなっているのかという太古からの疑問が残る．宇宙は広く人類はその果てまでは行けず究めることができない．地球と同じく宇宙は閉じているという説がある．

今まで光は直進すると考えられてきたが，これを否定することによって宇宙を解明しようとしたのはアインシュタイン（1879～1955）である．彼は，慣性系における光速度不変と相対性原理に基づく特殊相対性理論によって，ニュートン力学における絶対空間，絶対時間，エーテルなどの概念を捨て，新たな4次元世界像を打ち立てた．質量とエネルギーの同等性は，この理論から導かれた．さらに相対性理論を重力場に拡張する試みは1907年から始められ1915年一般相対性理論として完成した．

光は重力によりまがるのだ．地球から宇宙へ放たれた光は，重力場の影響をうけいつかは戻って来る．したがって，宇宙に果てがあるのではなく閉じているという説明が成り立つ．

空間は3次元座標として与えられ，それに時間の軸を加えたものが4次元座標である．地球レベルでは3次元座標で十分であるが，宇宙レベルでは4次元座標が必要になってくる．宇宙の果てを理解するには，ユークリッド幾何学やニュートン力学だけでは駄目で，非ユークリッド幾何学やアインシュタインの相対性理論が必要になってくる．

5. 4次元の世界へ行けるか

やや比喩的であるが次元について考えてみよう．尺とり虫やアリは，直線運動しかできない．1本の道しか知らない1次元動物である．池に浮かぶミズスマシは，その水面を泳ぐだけで平面運動しかできない2次元動物である．ヒトは直線も平面も空間も認識できる3次元動物である．光の速度を有限のものと感じ宇宙構造を把握できるのは，4次元動物の宇宙人だけである．

ここで，各次元に住む動物は自分より下位の次元については理解できるが，上位の次元については理解できないのである．たとえば，ヒトは3次元動物であるので，1次元動物のアリや2次元動物のミズスマシについては理解できるが，4次元の世界は想像できない．1次元動物のアリが平面を，ミズスマシが空間を理解できないのと同じ関係である．

3次元の世界で，4次元の座標系をどのように表現すべきかについて，いろいろ案がでているなかで，メビウスの帯がよく引き合いに出される．2次元の世界に住んでいても，メビウスの帯に乗ればこの平面の裏側に行けるのである．表裏の関係は，平面を超えた概念であるとするならば，メビウスの帯は2次元から，擬似3次元への掛け橋となるのだ．このような装置が工夫されるなら，3次元から4次元の世界への橋渡しがあるのではという期待がこめられるのである．

6. エンドレステープに応用

メビウスの帯は，宇宙の構造を解明する1つの手段として提案されたが，学問とは別に，その素晴らしい幾何学的な性質が，私たちの生活に応用されていたことがある．それはエンドレステープである．音楽の記録媒体はＣＤ（コンパクト・ディスク）からiPod（アップル社）などに変わろうとしているが，アナログ全盛の時代は磁気テープであった．

磁気テープをプラスチックのケースに入れたのがカセットテープであり，カセットテープはＡ面とＢ面があり，各面が終わればカセットを裏返すかテープを巻き戻さなければならなかった．この操作によるアイドリングタイムを無くす方法は，テープをメビウスの帯のように180度ねじってつないでおけばよいのである．連続して再生する必要のある店頭などにはエンドレステープが使われていた．いまでは博物館入りとなってしまったが，コンピュータのプリンターのインク・リボンにもメビウスの帯が応用されていた．

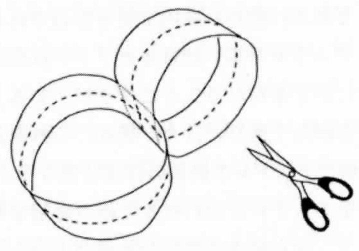


図9　十文字につなぐ

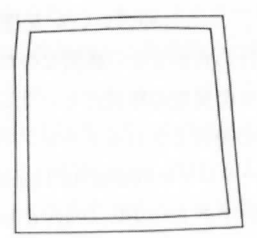


図10　四角形

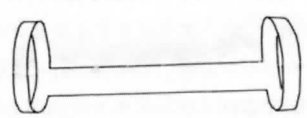


図11　中間形

メビウスの帯でさんざん遊んだ後は，私はいつも次のクイズを学生に出すことにしている．普通の帯を2つ用意します．しっかりノリづけしておき，これらを図9のように十文字につなぎます．さてこれを，点線に沿って2等分すればどうなるでしょうか．

これも，予想させると面白い．今までの結果が大きい輪であったり，大きい輪と小さい輪がつながったりしていたので，その延長上の予想が多い．学生の予想がすべてでそろった後，はさみで切らせてみる．驚くなかれ，大きな正方形の額縁ができるのだ（図10）．2つの輪から正方形ができること，3次元立体が2次元平面になることの意外性が見せ物だ．まさか平面になるとは誰も予想がつかない．

いまできた四角形から普通の輪を2つ作ることもできる．ハサミで切った動作を映像を逆回しにするように考えればよい．図10の四角形は，図11のような中間の形を経て図9の状態になる．要するに思考を柔軟にすればこのことが理解できる．

このクイズを出したところ学生から，輪を4つつなげればどうなるのですかと質問が出た．私は，やったことがなかったので，図12のように普通の輪を4つ十文字につないでハサミで切ってみると，今度は田の形になって平面となった（図13）．8つつないで切るとどうなるのだろうか．メビウスの帯から始めた遊びはつぎつぎと面白い話題がでてくるのであった．

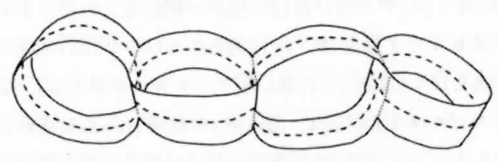


図12　四連を切ると

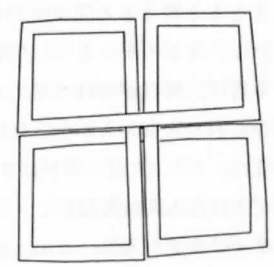


図13　田の形になる

（にしやま ゆたか／大阪経済大学）