# 面積を測る

西山　豊

## 1. 多角形の面積

こんな問題はどうだろうか．任意の多角形がある．「任意の」とは頂点の数が3つ以上ならいくつあってもかまわず，形も凸多角形だけでなく凹多角形を含むことを意味する．この多角形の頂点の数と各頂点の $xy$ 座標とが分っているとする．

$$P_1(x_1,\ y_1),\ P_2(x_2,\ y_2),\ \cdots,\ P_n(x_n,\ y_n)$$

このとき，多角形の面積を求めてみよう．方法は，どんな方法でもいい．ただし簡単に速く正確に求め，できれば「任意の」多角形に通用するアルゴリズムを完成させてほしい．たとえば，図1に示した頂点の数が8個の凹多角形ではどうなるだろうか．

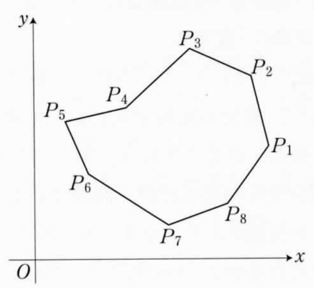

図1　面積を求めよ

もっとも初歩的な求め方はこうなるだろう．小学5年生の算数の教科書には「四角形，五角形，六角形などの面積は，それをいくつかの三角形に分けて求めることができる」とある．そこで図1の八角形を6個の三角形に分ける(図2)．そして，分けた三角形の面積を，「底辺×高さ÷2」の公式で求め，各々の面積を合計する．三角形の高さを示す線分は2つの三角定規でうまく引けるし，底辺と高さは，ものさしで測って求める．その値は多分きっちりした数値ではなく，小数点を含んだ値になるだろうが，小数点の含んだ掛け算，たし算はできるから，これができれば小学生にとっては合格である．

最も単純なこの方法は実際の土地の測量には三角測量として現在でも使われている．

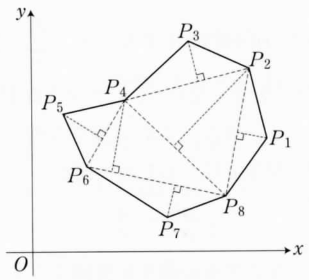

図2　三角形に分割

しかし，これでは簡単すぎる．もう少し上級生になると次のような求め方をするかも知れない．中学生になるとグラフ用紙を使った問題が増えてきて直交座標についての知識がついてくるから，図3に示すように $x$ 軸，$y$ 軸に沿って補助線を引くだろう．この図から一見して分るように，多角形の面積は，一番外の長方形の面積から8個の三角形と，4個の長方形の面積を引くことによって求めることができる．この方法では，ものさしで長さを測る必要はなく頂点の座標から簡単に求められる．

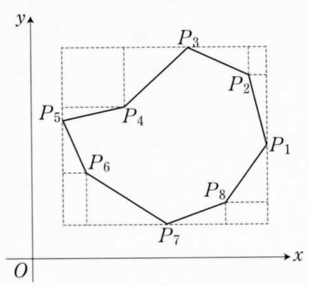

図3　平行な補助線



## 2. ヘロンの公式

以上の方法には任意の多角形の「任意の」に対する一般性の考えが入っていない．図形に合わせてその都度，補助線を引いてみる必要がある．そこで計算のアルゴリズムに一般性をもたせてみよう．頂点 $P_1$ を始点にして，頂点 $P_3$ から頂点 $P_7$ まで次々と補助線を引き，6個の三角形に分割する(図4)．

一般に，凸 $n$ 角形は $n-2$ 個の三角形に分割される．さて，三角形の面積を求めるにはヘロンの公式というのがあった．ヘロンの公式は現在では高校数学の指導要領からはずされているが非常に有力な公式である．つまり，三角形の3辺の長さを $a$, $b$, $c$ とすると，面積 $S$ は，

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

$$\left(ただし\ s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

となる．辺の長さは，ものさしで測ったりせずに，ピタゴラスの定理を使って求める．各点の座標が示されているから，頂点 $P_i(x_i,\ y_i)$ と頂点 $P_j(x_j,\ y_j)$ との距離 $\overline{P_iP_j}$ は，

$$\overline{P_iP_j}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \tag{2}$$

となる．この方法は，$n$ 多角形に対して一般性をもたせる点で有力である．図をいちいち描いてみる必要がない．ただし複雑な図形については成り立たないこと，また計算に根号が出てきて筆算するには少々やっかいである．

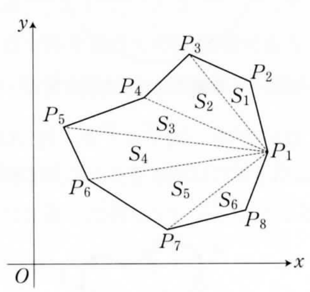

図4　分割の一般化

## 3. 台形公式を応用

いままで3つの方法について説明したが，もっと簡単に速くて正確に求める方法はないのだろうか．これから説明する方法は高校までの数学では習わないが，台形公式を応用したちょっとエレガントな解法である．この方法によると頂点の数が増えても凹多角形であろうとたちどころに計算できるのである．

原理は簡単である．各頂点から $x$ 軸に垂線を下ろし，その足を $H_1$, …, $H_8$ とする(図5)．となりあわせる頂点と垂線で台形ができる．たとえば，頂点 $P_1$, $P_2$ と垂線 $H_1$, $H_2$ とでは，上底 $P_1H_1$，下底 $P_2H_2$，高さ $H_1H_2$ とする台形 $P_1H_1P_2H_2$ ができる．これらの台形は横向きになっていて，全部で8個ある．つまり頂点の数だけ台形ができる．

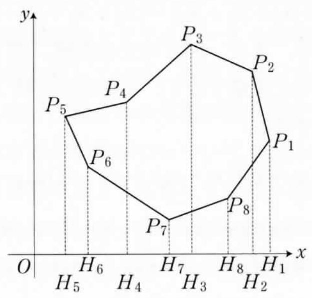

図5　各頂点から垂線を下ろす

頂点 $P_1$ から頂点 $P_5$ までと，頂点 $P_5$ から頂点 $P_1$ までを分けて図示する(図6，図7)．それぞれの台形の面積は，「(上底＋下底)×高さ÷2」で求められる．

面積 $S_1 \sim S_8$ を座標値で表わしてみよう．図6についての面積 $S_1 \sim S_4$ は次の通りである．

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=(y_1+y_2)\times(x_1-x_2)\div 2\\
S_2&=(y_2+y_3)\times(x_2-x_3)\div 2\\
S_3&=(y_3+y_4)\times(x_3-x_4)\div 2\\
S_4&=(y_4+y_5)\times(x_4-x_5)\div 2
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

図7についての面積 $S_5 \sim S_8$ は次の通りである．

$$\left.\begin{aligned}
S_5&=(y_5+y_6)\times(x_6-x_5)\div 2\\
S_6&=(y_6+y_7)\times(x_7-x_6)\div 2\\
S_7&=(y_7+y_8)\times(x_8-x_7)\div 2\\
S_8&=(y_8+y_1)\times(x_1-x_8)\div 2
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

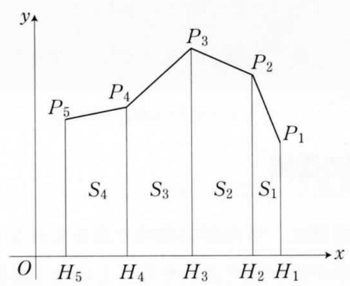

図6　正の面積

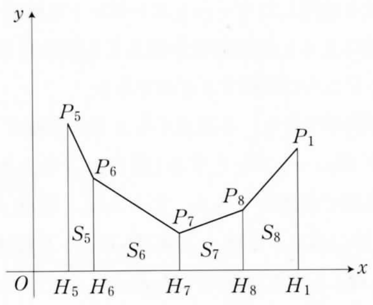


図7　負の面積

図6と図7からわかるように，多角形の面積は，

$$S=(S_1+S_2+S_3+S_4)-(S_5+S_6+S_7+S_8) \quad (5)$$

で求められる．また，図6は正の面積，図7は負の面積として符号に注意すると，多角形の面積 $S$ はつぎのように整理できる．

$$\begin{aligned} S=\frac{1}{2}\{&(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)\\ &+(y_3+y_4)(x_3-x_4)+(y_4+y_5)(x_4-x_5)\\ &+(y_5+y_6)(x_5-x_6)+(y_6+y_7)(x_6-x_7)\\ &+(y_7+y_8)(x_7-x_8)+(y_8+y_1)(x_8-x_1)\} \end{aligned} \quad (6)$$

この式で，右辺の各項がすべて和の形で表わせるのは高さが符号つきで表わせるからだ．つまり，$S_1$ から $S_4$ までは高さが正で，$S_5$ から $S_8$ までは高さが負になり，面積もそれぞれ正，負となる．

一般に，$n$ 多角形の面積は，

$$\begin{aligned} S=\frac{1}{2}\{&(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)\\ &+\cdots+(y_n+y_1)(x_n-x_1)\} \end{aligned} \quad (7)$$

となる．変数の添え字が循環的になっているため，面積を求めるプラグラムが簡単になる．Visual Basic または C 言語ではどのようになるか各自確かめてみること．

高校数学の教科書で積分に次の説明がある．2つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる面積は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx \quad (8)$$

で求まる．多角形の面積を求める場合は，これを

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx \quad (8)'$$

と分解して，各々の積分を台形公式で求めたことに対応している．

## 4. 地図の面積

地図の面積は，多角形の面積を求めるほど単純ではない．地形が折れ線で表わせることはなく曲線で複雑である．折れ線の頂点の数を増やして曲線に近づけるという方法もあるが現実的でない．よく用いられる方法としては，地図に方眼紙を重ね合わせて，方眼の数を数えて求める方法がある．また，均一な材質の紙で地形を切りとり，その重さを天びんで測って面積を求める方法もある．

しかし，ここではもっと便利な方法について紹介しよう．それは，プラニメーターという面積を測る機器についてである．この測定器は，今でも設計事務所ではよく使われている．プラニメーターは，1856年スイス人アムスラーによって考案されたもので，その仕組みには完全な数学上の裏づけがある．

プラニメーターの基本的な構成を図8に示そう．$B$ 点で自由に回転できるように棹(さお) $BA$ と棹 $BO$ がとりつけられてある．測りたい面積の閉曲線を $\Gamma$ とするとき，その曲線の外に定点 $O$ を固定する．そして，測点 $A$ を $\Gamma$ に沿って，時計まわりに一周したとき，$B$ にとりつけられた小車輪の回転数を読みとり，棹の長さ $AB$ を掛けあわせれば面積が求まるのである．求めたい閉曲線上を一周すれば面積が求まるというのは一種のマジックのようでもあり，多角形の面積を求めた台形公式に似ている．

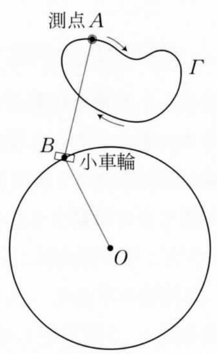


図8　小車輪の回転数を読み取る．

また，$A$ 点が $\Gamma$ を一周するとき，棹 $AB$ が通過する面積を差し引きすれば求まることになる模式図を図9に示しておく．

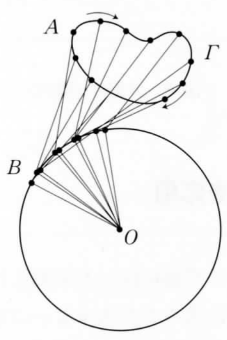


図9　棹が通過する面積を差し引く



## 5. プラニメーターの原理

この測定器は少し面白いので．その原理について簡単に触れておこう．測点 $A$ が $A'$ まで動くとき小車輪 $B$ は $B'$ まで動くとする．一般に，$AA'$ の移動は，平行移動 $\overline{AA''}$ と回転移動 $\overparen{A''A'}$ に分けられる．棹 $AB$ の長さを $l$，平行移動量を $ds$，回転移動量を $d\theta$ とすれば，棹 $AB$ の移動によって覆われる面積 $dA$ は，

$$dA=lds+l^2d\theta/2 \quad (9)$$

となる．$B$ にとりつけた小車輪の回転量を $dn$ とすれば，

$$dn=ds \quad (10)$$

となり，(10)を(9)に代入して

$$dA=ldn+l^2d\theta/2 \quad (9)'$$

となる．

ここで，(10)式について，少し説明を加えておこう．図10に示したのは，$\angle ABO$ と小車輪の関係である．小車輪の回転する方向が，棹 $AB$ の進む方向となす角度を $\alpha$ とすれば，回転量 $dn$ は

$$dn=\overparen{BB'}\cos\alpha \quad (11)$$

の関係がある．すなわち，図10(1)の場合は $\alpha=0°$ であるから小車輪は完全に回転し，同図(3)の場合は $\alpha=90°$ であるから小車輪はまったく回転しない．同図(2)の場合は(1)と(3)の中間の場合で，小車輪はすべりながら回転する．すなわち $\cos\alpha$ 分だけ回転する．

さて，面積は閉曲線一周分についてであるから，(9)'式を積分して，

$$S=\oint dA=\oint ldn+\oint\frac{l^2}{2}d\theta=l\times n \quad (12)$$

となる．$n$ は全体を通じての回転数である．また，回転移動 $d\theta$ に関する積分は一周でゼロになるから

$$\oint d\theta=0 \quad (13)$$

で，第2項は消えることになる．このようにして小車輪の回転数は面積に比例していることになる．

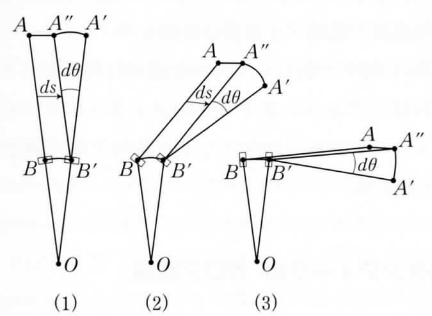


図10

プラニメーターは面白い器具だが，購入するとなると数万円する．私は機構を調べるのが目的であるので，インターネットのオークションで中古のプラニメーターを入手した．図11に示したのは極式(polar)とよばれるもので図8で示したように動く．固定点 $O$ は地図の外においておく．そして観測点 $A$ を琵琶湖に沿って時計回りに一周させ，棹 $AB$ に取り付けられた小車輪の回転数 $n$ を読み取り，棹の長さを掛け合わせ，地図の縮尺などを考慮すると面積が求められる．琵琶湖の面積は意外と正確に求まった．

これ以外に直進式(linear)というのがある．図12がそれで、固定点がなくプラニメーターは地図上を移動しながら面積を測っていく．観測点はレンズになっていて上から覗け，棹には小車輪が取り付けてある．棹の末端には左右の動輪がついていて，ある幅の領域を前後にだけ移動するようになっている．現在はこの方式がよく使われている．プラニメーターには方式の違うものが他にもあり、どれも数学の原理が応用されている．

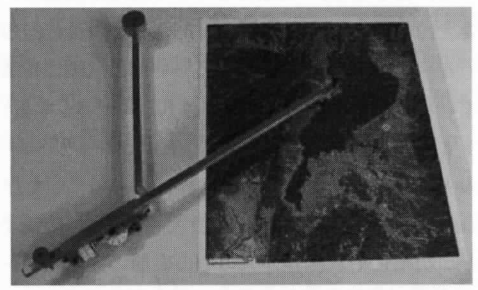

図11．極式プラニメーター

図12．直進式プラニメーター

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)