数学を楽しむ

相似変換の不動点

西山　豊

1. ランダムドット・パターン

本誌で過去に二度掲載されたことがあるが，今回は不動点についての話しをしよう．ここに2枚の合同な折り紙(正方形)が机の上に置いてあるとしよう(図1)．この2つの折り紙は平行移動と回転移動と対称移動によって重ね合わせることができ，これらを合同変換という．一方，すべての合同変換には変換によって動かない点が少なくとも1個存在することが知られている．この動かない点のことを不動点という．不動点を中心に回転すると，2つの図形を重ね合わせることができる．

不動点の位置を作図する方法は，一般的にはコンパスと定規で求められる．正方形の各頂点を A, B, C, D，移動後の正方形の頂点を A', B', C', D' としたとき，線分 AA' の垂直二等分線と，線分 BB' の垂直二等分線を引き，これらの交点が不動点になる．これで問題ないのだが，不動点の作図についてコンパスを使わず定規だけで求める方法を，私は1982年にふとしたことから発見した[1]．それは図1に示すように，2枚の正方形において向かいあった各辺の交点と交点を結ぶ．2本の直線の交点が不動点になるといういたってシンプルな作図法である．この不動点をコンパスの芯またはボールペンのペン先で押さえ，上に乗った正方形を回転させると2枚の正方形は完全に重なるのである．この事実をまだ知らない読者は一度試してみてください．折り紙がない場合は，コピー紙などの長方形でもこのことが確かめられます．

この新しい作図法がどうしてわかったかは，図2(1)に示すようにランダムドット・パターンという透明なOHPシートに描かれたランダムな点群を2枚重ねて操作していたからだ．同じ図柄のパターンを重ね合わせて，上のシートを少し回転すると同心円が見える．この同心円の中心を指で押さえ，上のシートを逆回転させると2枚の図柄は完全に一致する．つまり，回転の中心が不動点になっているわけだ．ランダムドット・パターンはVisual Basic 2005では20行くらいの命令で作れることができるので，このパターンを持っていない読者はぜひ作成してください．

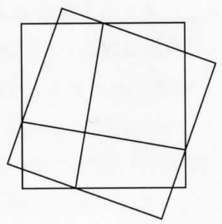
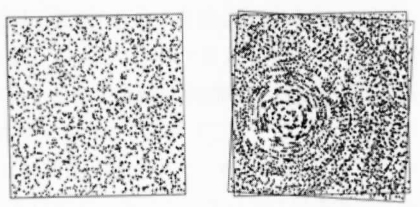


図1．合同変換の不動点



(1)　(2)

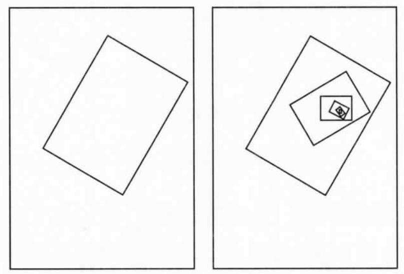
図2．ランダムドット・パターン

2. 縮尺の異なる地図

さて，今回のメインテーマは合同変換でなく相似変換の不動点についてだ．図3(1)のように長方形の上に，これと相似な長方形(かりに縮尺が1/2としておこう)が置いてある．この場合の不動点を求めてみよう．コクセターの『幾何学入門』には，「トレーシング・ペーパー上に異なった縮尺で同じ国の地図を2枚描いて重ねると，ただ1か所同じ点で表される地点が両方の地図上にある．(一方の地図は他方に重ねる前にまわしておくものとする)」とある[2]．

これは縮小，回転移動による相似変換には必ず不動点があるという例である．この事実を知らない読者は試してみること．透明なOHPシートに縮小コピーしたものを重ねることで確認できる．

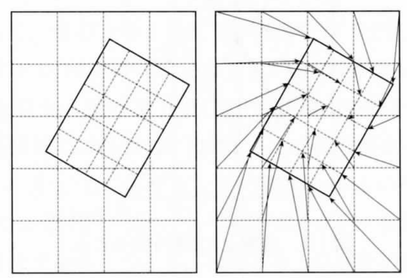
不動点の位置を求めるひとつの方法として図3(2)がある．図3(1)をこのまま1/2縮小コピーする．それを小さいほうの長方形に重ねる．そして，さらに1/2縮小コピーしたものを重ねていくという操作を繰り返していくとその長方形は不動点に近づいていくというものだ．もちろん，縮小されていく長方形の列は確かに不動点に収束するが，こういう方法をとらなくとも図3(1)の2つの長方形の関係だけでも不動点の作図は可能なのだ．



(1)　(2)

図3．相似変換の不動点

相似な長方形を考えるとき，長方形の辺の上だけを考えるのではなく，長方形の内部も同時に相似変換されていることを考えるとよい．そこで，図4(1)のように長方形の内部に縦3本，横4本の点線を入れた．この点線は縮小された長方形についても対応している．そこで，もとの長方形の格子点と縮小された長方形の格子点に対応する矢印を引いてみた．相似変換によって矢印の分だけ格子点が移動したことになるが，まったく移動しない点がある．これが相似変換の場合の不動点である．



(1)　(2)

図4．対応する格子間に矢印を入れる．

手作業では時間がかかるので，Visual Basic 2005でプログラムを組んで格子点の数を増やして作図したのが図5である．この図では不動点の位置がよくわかる．

図5．パソコンで描いた相似変換

3. コンパスと定規で

確かに図5では不動点の位置がよくわかるし，不動点が1個しかないこともわかる．しかし，パソコンで描かなくて不動点の位置を求めることができるのだろうか．それを考えてみよう．

相似変換は，平行移動，回転移動，縮小または拡大の3つの変換が同時に伴う．合同変換の場合は平行移動と回転移動だけである．そこで，相似図形の回転移動がない場合を図6に示そう．もとの長方形 $ABCD$ と縮小された長方形 $A'B'C'D'$ の関係は対応する辺 AB と $A'B'$, BC と $B'C'$, CD と $C'D'$, DA と $D'A'$ が平行であり，対応する頂点を結ぶとそれらは1点 O で交わる．この点を相似の中心という．相似の中心 O からみると AB が $A'B'$ に縮小されている関係が理解できる．AB と $A'B'$ の長さの比率を相似比という．

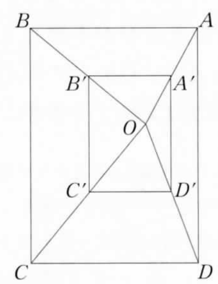


図6．相似の中心

相似変換の不動点は図6の状態が重要なので，この位置関係をよくイメージしておくこと．さて，実際の相似変換は平行移動，縮小移動に加えて回転移動が伴うのは図3，図4でみたとおりであるが，この場合の

不動点の作図を考えてみよう．一般的に知られている方法はコンパスと定規を用いて作図する方法で，その2つの方法を説明しよう．

辺ABと辺$A'B'$が交わる点をPとする．交わらない場合は$A'B'$を延長させて考えること．PとAとA'の3点を通る円，PとBとB'の3点を通る円を描く．この2つの円の交点Oが不動点になる．図7が作図の例であるが，$\triangle OAB$と$\triangle OA'B'$が相似の関係になっていてOを中心に縮小させながら回転すると辺ABが辺$A'B'$に移動することが理解できるであろう．この作図法は文献[3]を参考にした．

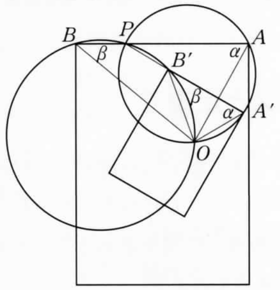


図7. 相似図形を用いる(解1)

もうひとつの作図法はアポロニウスの円を用いる方法である(図8)．長方形$ABCD$と長方形$A'B'C'D'$において頂点Aと頂点A'からの距離の比が相似比（AB対$A'B'$）となる点の軌跡を描くと頂点Aと頂点A'を結ぶ直線上に直径がくるアポロニウスの円O_1となる．同様にして，頂点Bと頂点B'からの距離の比が相似比となる点の軌跡を描くと，頂点Bと頂点B'を結ぶ直線上に直径がくるアポロニウスの円O_2となる．この2つのアポロニウスの円の交点Oが不動点となる．実際に$OA:OA'=AB:A'B'$，$OB:OB'=AB:A'B'$となっている．この作図法は文献[2]を参考にした．

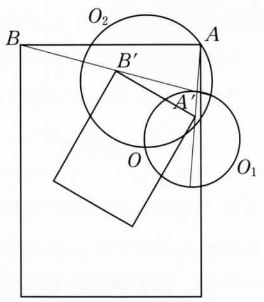


図8. アポロニウスの円を用いる(解2)

4. 定規だけで作図する方法

以上は不動点を求める代表的な作図法であるが，冒頭で述べた合同変換の作図法が相似変換にも適用できないかであるが，これが可能なのだ．それを図9に示そう．長方形$ABCD$と長方形$A'B'C'D'$において対応する辺の交点を求める．交点が求まらないときは辺を延長させて考えること．辺ABと辺$A'B'$の交点をP，辺CDと$C'D'$の交点をQ，辺DAと辺$D'A'$の交点をR，辺BCと辺$B'C'$の交点をSとする．そして，直線PQと直線RSの交点をOとしたとき，これが相似変換の不動点になる．この方法はコンパスを使用しないで作図できるもっともエレガントな作図法である．

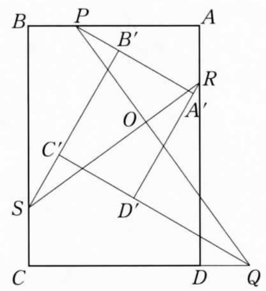


図9. コンパスを使わない方法(解3)

では，この方法で求めた点Oがどうして不動点になっているかを説明しよう．不動点は直線上PQにあり，同時に直線RS上にあることを示せばよい．まず，直線PQ上の任意の点Oに不動点があったとしよう．図10に示すように点Oから辺ABと辺$A'B'$におろした垂線の長さの比$OH_1:OH_2$は相似比($BC:B'C'$)となっている．同様に点Oから辺CDと辺$C'D'$におろした垂線の長さの比$OH_3:OH_4$も相似比($BC:B'C'$)となっている．

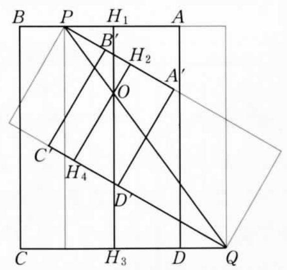


図10. 直線上に回転中心をとる．

そこで点Oを中心に長方形$A'B'C'D'$を回転させ，対応する辺どうしを平行にし，点Oから各頂点A', B', C', D'に向けて線を引く．その延長線上に相似比から逆算して，もとの長方形に拡大したものを$A''B''C''D''$とする．最初の長方形$ABCD$といま作図した$A''B''C''D''$を比較すると，辺ABと辺$A''B''$は同一直線上に，辺CDと辺$C''D''$は同一直線上にくることがわかる(図11)．つまり直線PQ上の任意の点を回転の中心としたとき，上下の辺がそろうことになる．対応する辺は合同変換のときのように重ならないが，図6で示したように相似変換の場合の「重ねあわせ」の位置関係に対応している．

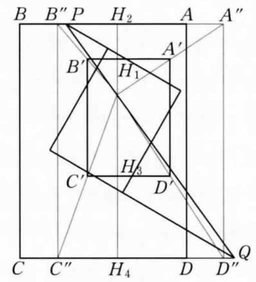


図11. 上下の辺がそろう．

同じようにして，今度は直線RS上の任意の点Oを回転の中心としよう(図12)．この場合も点OからDAと$D'A'$におろした垂線の長さの比は相似比になっている．点OからBCと$B'C'$におろした垂線の長さの比も相似比である．

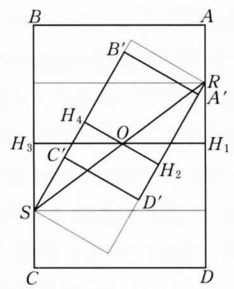


図12. 直線RS上に回転中心をとる．

そして，点Oを中心に長方形$A'B'C'D'$を回転させ，対応する4つの辺が平行になるようにすると図13になる．点Oから長方形$A'B'C'D'$の各頂点に線を引き，その延長線上に相似比を掛けてもとの長方形を復元すると$A''B''C''D''$となる．この図でわかるのは，辺$B''C''$と辺BC，辺$D''A''$と辺DAが同一直線上にくることである．つまり，直線RS上に回転の中心を持ってくると，左右の辺がそろうことになる．

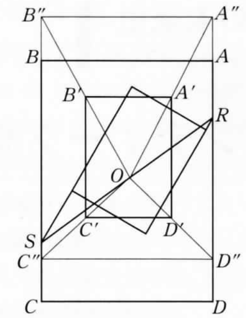


図13. 左右の辺がそろう．

図11と図13より，上下の辺と左右の辺が両方ともそろうためには，回転の中心が直線PQ上にあり，かつ直線RS上にあることである．つまり，直線PQと直線RSの交点Oを回転の中心にするなら，上下，左右の4つの辺は同時にそろうことになる．回転の中心は相似変換の不動点である．

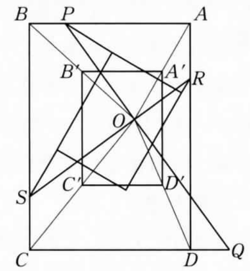


図14. 上下，左右の辺がそろう．

定規だけによる不動点の作図法を紹介したが，この方法は合同変換や相似変換だけでなく，アフィン変換にも適用される．アフィン変換とは行列による一次変換のことであるので，長さも角度も変える変換である．任意の2つの三角形が与えられたときの不動点が，ここで説明した方法で作図できるのである．詳しくは文献[4]を参照のこと．

参考文献

[1] 西山豊「折り紙をそろえる」『数学セミナー』日本評論社，1982年2月号，表紙＋p28
[2] H.S.M. コクセター著，銀林浩訳『幾何学入門』明治図書，1965年，pp.70−79
[3] M.S. クラムキン『数学オリンピック問題集《アメリカ編》』東京図書，1990年7月，p.73
[4] 西山豊「アフィン変換における不動点」『理系への数学』2002年9月号，pp.74−76

（にしやま ゆたか／大阪経済大学）