数学を楽しむ

周長と面積が同じ図形

西山　豊

1. Equable Shapes

イギリスの知人からメールがきた．Equable Shapes について調べていて面白いので論文を書こうと思っているが，これについて知っているかということだ．私は，Equable Shapes がなんのことかすぐには理解できなかった．equal は「等しい」，able は「できる」，shape は「形」であるから，直訳すると「等しくできる形」ということになる．こんなのが数学の問題にあったのかなと，インターネットの検索や百科事典 Wikipedia で調べてみると，ずばりこのキーワードでヒットし，これについての説明があった．

つまり，こういうことだ．1 辺の長さが 4 の正方形は，周囲の長さは $4\times4=16$，面積は $4\times4=16$ で数値としては一致する．このような図形を Equable Shape という．辺の長さは 1 次元の量であり，面積は 2 次元の量であるので，次元の違う量を等しいとおくのは根本的に間違いであるが，ちょっとした数学の問題ができる．周囲の長さと面積の値が数値上一致する図形 Equable Shapes は他にどのようなものがあるのだろうか．特に，辺の長さが整数で表される図形にどのようなものがあるのだろうか．この教材は小学生から楽しめる問題でもある．

2. 長方形の場合

まずは，長方形について考えてみよう．長方形の縦を x，横を y とすると，周囲の長さは $2x+2y=2(x+y)$，面積は xy であるから，これらが等しいと仮定すると，

$$2(x+y)=xy$$

式を変形すると，つぎのようになる．

$$(x-2)y=2x$$

$$y=\frac{2x}{x-2}=2+\frac{4}{x-2}$$

これは双曲線の方程式であるが，正の数で整数解を求めてみると，つぎのようになる．

$$(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$$

たとえば，$(x,\ y)=(3,\ 6)$ は，縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形で，周囲の長さは $2\times(3+6)=18$，面積は $3\times6=18$ で，ともに 18 で条件を満たしている．$(x,\ y)=(4,\ 4)$ は正方形のことであり，$(x,\ y)=(3,\ 6)$ と $(x,\ y)=(6,\ 3)$ は同じ形であるので，長方形の Equable Shapes は 1 個である (図 1)．

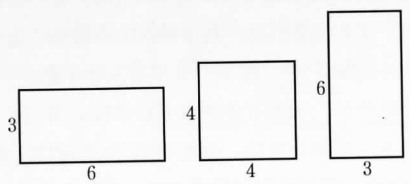

図 1．長方形 $(x,\ y)=(3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3)$

一般の正多角形についてはどうだろうか．図 2 のように正 n 角形の一辺の長さを x，中心から各辺におろした垂線の長さを h とする．周囲の長さは nx で，面積は $n\times\left(\frac{xh}{2}\right)$ であるから $nx=n\times\left(\frac{xh}{2}\right)$．これを解いて $h=2$．一方，$\frac{x}{2}=h\tan\frac{\pi}{n}$ の関係があるから，

$$x=4\tan\frac{\pi}{x}$$

となる．この式を満たす整数解は $(n,\ x)=(4,\ 4)$，つまり正方形の場合だけで，他には存在しない．

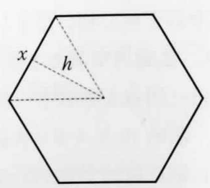

図 2．正多角形

3. 三角形に 5 つの解

正方形と長方形にひとつずつ解が見つかったが，三角形について考えてみよう．正三角形については存在しない．なぜなら正多角形でみたように正方形だけが条件を満たすからだ．そこで条件をゆるめて，二等辺三角形について考えてみよう．図 3 のように底辺が x，高さが h，二等辺が y の二等辺三角形とする．周囲の長さは $2y+x$，面積は $\frac{xh}{2}$ であるから，

$$2y+x=\frac{xh}{2}$$

ピタゴラスの定理より

$$y^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

の関係があり，これらの式から y を消去して整理すると

$$x^2=16+\frac{64}{h-4}$$

になる．$(h,\ x^2)$ の組み合わせでともに正の整数となるのは次の通りである．これら 7 通りの解の中で x が整数となるのは存在しない．したがって二等辺三角形では条件を満たすものはない．

h	5	6	8	12	20	36	68
x^2	80	48	32	24	20	18	17

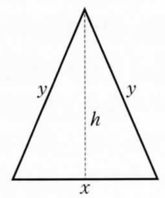

図 3．二等辺三角形

中学生で学ぶ三角形は，正三角形，二等辺三角形，直角三角形，鈍角三角形，鋭角三角形があるが，これらをまとめて一般三角形について解くことができないかを考えてみた．三角関数の応用として出てくる公式にヘロンの公式がある．それはつぎのようなものである．

三角形の辺の長さを $a,\ b,\ c$ としたとき，面積 S はつぎのようになる．

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$(\text{ただし } s=(a+b+c)/2)$$

この公式は余弦定理を使うと証明できるが，ここでは触れない．一方，周囲の長さは

$$a+b+c=2s$$

となり，周囲の長さと面積が等しくなるから，

$$2s=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

の関係式を得る．この方程式で $(a,\ b,\ c)$ の整数解を見つける問題となるが，変数の数が 3 個で式が 1 個であるから解は不定となるうえ，ノートと鉛筆では解けそうにない．

数学の問題を解くためにパソコンを使うのは禁じ手であるのを承知の上で，私はプログラムで数値を求めてみた．Visual　Basic のプログラムは 10 行ほどの命令文で済み，3 辺の長さが $1\leqq a,b,c\leqq1000$ の範囲で整数解が存在するか調査してみた．すると偶然にもつぎの 5 つの解が見つかった．ヘロンの公式は Equable Shapes を見つけるのに実に強力な公式である．

$$(a,\ b,\ c)=(5,\ 12,\ 13),\ (6,\ 8,\ 10),\ (6,\ 25,\ 29),$$
$$(7,\ 15,\ 20),\ (9,\ 10,\ 17)$$

偶然にも見つかった 5 つの三角形はどういうものだろうか．作図してみるとその概要を知ることができる．私は 5 つの解を 2 つのグループに分けることができた．

$$(a,\ b,\ c)=(5,\ 12,\ 13),\ (6,\ 8,\ 10)$$

$$(a,\ b,\ c)=(6,\ 25,\ 29),\ (7,\ 15,\ 20),\ (9,\ 10,\ 17)$$

前者は直角三角形で，後者は鈍角三角形である．たとえば，前者の $(a,\ b,\ c)=(5,\ 12,\ 13)$ は，

$$5^2+12^2=13^2$$

で直角三角形となっていて，周囲の長さは

$$5+12+13=30$$

で，面積は

$$5\times12/2=30$$

で，周囲の長さと面積がともに 30 である．

4. ピタゴラスの三角形

直角三角形で 3 辺の長さがすべて整数となるものはピタゴラスの三角形として知られている．Equable Shapes を直角三角形に限定して，その整数解を求めるためにはパソコンを使わず，ノートと鉛筆で解くこともできる．

ピタゴラスの三角形は，自然数 $m,\ n\ (m>n)$ に対して，三辺が $m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2$ である直角三角形のことをいい，これらは次式より明らかである．

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

いま，ピタゴラスの三角形で周囲の長さと面積が等しくなる場合を計算してみよう．周囲の長さは

$$(m^2-n^2)+2mn+(m^2+n^2)=2m(m+n)$$

であり，面積は

$$(m^2-n^2)\times 2mn/2 = mn(m+n)(m-n)$$

であるから，

$$2m(m+n) = mn(m+n)(m-n)$$

$$2 = n(m-n)$$

$$m = n+2/n$$

この式での整数解は $(m,\ n)=(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$ の2通りだけである．そこで，これら $(m,\ n)$ の値を代入すると，

$$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)=(8,\ 6,\ 10),\ (5,\ 12,\ 13)$$

となり，前述のパソコンでもとめた結果と一致する(図4)．

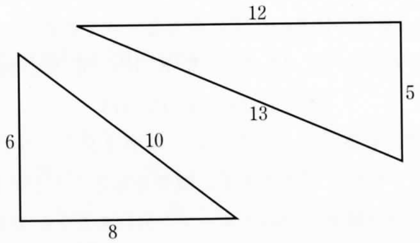

図4．ピタゴラスの三角形

三角形の5つの解のうち前半は解決できたが，問題は，後半の3つの解である．これらがどのような三角形であるかを知るために私は作図して調べた．

3つの三角形はともに鈍角三角形であること，そして，これらはピタゴラスの三角形を組み合わせることによってできる鈍角三角形であることがわかった．たとえば，$(a,\ b,\ c)=(6,\ 25,\ 29)$ は鈍角三角形であるが，大きいピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(21,\ 20,\ 29)$ から，小さいピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(15,\ 20,\ 25)$ を取り去ることによってできている．$(a,\ b,\ c)=(15,\ 20,\ 25)$ は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の各辺を5倍したものである．

底辺の長さは $21-15=6$ であり，高さは20であり，残る2辺は29と25であるから，

周囲の長さは

$$6+29+25=60$$

で，面積は

$$\frac{1}{2}\times 6\times 20=60$$

で，ともに60である．

同様にして $(a,\ b,\ c)=(7,\ 15,\ 20)$ はピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(16,\ 12,\ 20)$ から，ピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(9,\ 12,\ 15)$ を取り去った鈍角三角形であり，$(a,\ b,\ c)=(9,\ 10,\ 17)$ はピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(15,\ 8,\ 17)$ からピタゴラスの三角形 $(a,\ b,\ c)=(6,\ 8,\ 10)$ を取り去った鈍角三角形である(図5)．取り去る三角形は3つとも $(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ がベースになっていて，これらの整数倍になっていることも特徴である．

このように高さが同じであるピタゴラス三角形を組み合わせて鈍角三角形を作れば，3辺が整数になり，かつ周囲の長さと面積が等しくなる Equable Shapes の可能性があるということだ．

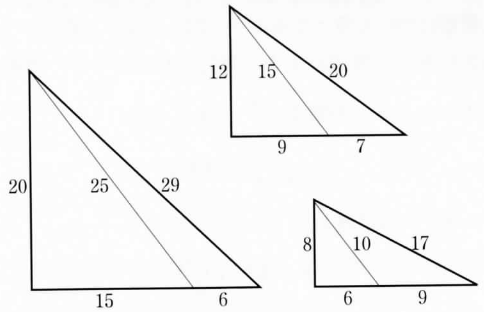

図5．ピタゴラスの三角形を組み合わせる

5. 一般四角形について

さて，四角形について，正方形，長方形以外のものを考えてみよう．四角形には平行四辺形，台形，ひし形などがある．平行四辺形は定義より対辺が平行な四辺形であるが，見方を変えると長方形を縦方向に歪めたものである．縦の長さが5で横の長さが6の長方形は，周囲の長さが22で面積が30となり，面積のほうが大きい．そこでマッチ箱をつぶすように縦方向に歪めると面積が22になるものができる可能性がある．底辺が6で高さを h とすると，周囲の長さは $2\times(5+6)$ で，面積は $6\times h$ であるから，

$$2\times(5+6)=6\times h$$

$$h=\frac{11}{3}$$

このように高さ h を決めるとどんな平行四辺形でも Equable Shapes にすることができる(図6)．

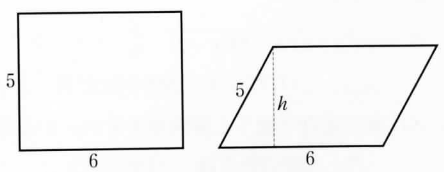

図6．平行四辺形

ひし形は4辺の長さが等しく，角度が直角以外のものをいうが，正方形を縦方向に歪め，回転したものとみなせる．たとえば，1辺が5の正方形は周囲の長さが $5\times 4=20$ で面積が $5\times 5=25$ で面積のほうが大きい．そこで，図7右のように正方形を押しつぶすと面積が20になるひし形を作ることができる．面積＝周囲の長さより，

$$2\times\sqrt{5^2-x^2}\times x=20$$

$$x=\sqrt{5}$$

このようにして，辺の長さ a が4以上のすべてのひし形は Equable Shapes にすることができる．

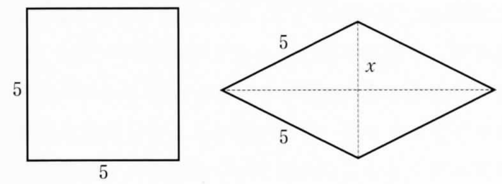

図7．ひし形 $(a\geqq 4)$

さて，ここで一般四角形について考えてみよう．辺の長さが大きくなるにつれて面積のほうが大きくなっていく．これは辺の長さが1次元の量であり，面積が2次元の量であるからだ．しかし，平行四辺形やひし形で見たように，四角形も押しつぶせば面積が小さくなっていくので，条件を満たす形が見つかるかもしれない．

いま仮に任意の四角形を

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(7,\ 4,\ 5,\ 6)$$

として検討してみよう(図8)．周囲の長さは

$$a+b+c+d=7+4+5+6=22$$

である．4つの辺で，$a=7$ を底辺とする．底辺と $b=4$ のなす角度を θ として，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で四角形を動かしてみる．$\theta=\pi$ のとき四角形は直線状になり面積はゼロであり，$\theta=\frac{\pi}{2}$ あたりで面積は最大になり28を超える．面積が0から28あたりを連続的に変化していくのであるから周囲の長さ22と値が等しくなる形はあるはずだ．

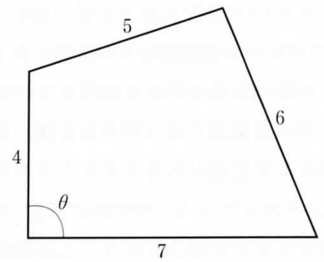

図8．任意の四角形 $(a,\ b,\ c,\ d)=(7,\ 4,\ 5,\ 6)$

実際に作図してみると図9のようになり，θ が135°あたりで面積が22となる(網がけした図形)．面積が22となるのは面積が最大を境にして θ が45°あたりでもうひとつの解が存在する．

例では数値を $(a,\ b,\ c,\ d)=(7,\ 4,\ 5,\ 6)$ に固定したが，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(n+3,\ n,\ n+1,\ n+2)\quad n\geqq 3$$

となる四角形はすべて Equable Shapes の条件を満たす形が存在することになる．

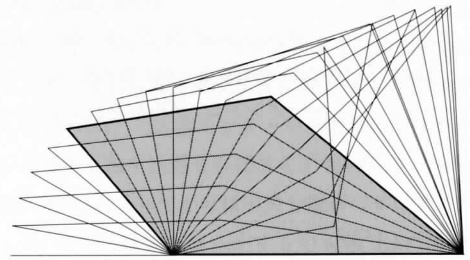

図9．θ を0から π まで変化させる．

6. エレガントな解答をもとむ

五角形以上は，任意の四角形でみたように図形を押しつぶすことで Equable Shapes の可能性はいくらでも考えられ，数学の問題としては魅力がなくなる．気になるのは一般三角形の解で偶然に見つかった3つの鈍角三角形である．

$$(a,\ b,\ c)=(6,\ 25,\ 29),\ (7,\ 15,\ 20),\ (9,\ 10,\ 17)$$

この3つの解は，これだけなのだろうか．パソコンでチェックした結果，$1\leqq a,b,c\leqq 1000$ の範囲では3つしか見つからなかった．範囲を広げて解を見つけてもよいが，$1\leqq a,b,c\leqq 10000$ が限界であろう．辺の大きさが大きくなるにつれて面積は辺の長さの2乗に比例するから，Equable Shapes の可能性は小さくなる．しかし，ピタゴラスの三角形は無限に作れるわけだから，高さが同じ直角三角形を組み合わせることによって条件をみたす鈍角三角形ができるかもしれない．

この問題に興味をもたれた読者は，他にも解があるのかどうかを検討するとともに，3つしか解がない場合はエレガントな解答を考えてください．

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)