動し，シュヴァルツやデュドネの指導の下で関数解析方面の仕事をスタートさせて，これが成功裏に進展していた時期には，グロタンディークはシュヴァルツの家にピアノを弾きに行っていたという「証言」がある([7] p.488)．ということはやはり，グロタンディークがピアノを習ったのはコレージュ・セヴノルだったという気がする．ぼくが直接聞いたヴレノム(仮名，グロタンディークの「最後の恋人」)の「証言」によれば，グロタンディークがよく演奏していたのは「宗教音楽」だったという．そういえば，ヴレノムが「グロタンディークがピアノを習ったのはル・シャンボンだった」と，ぼくと京子に語ったこともあった．モルモワロン(第2次隠遁地)のグロタンディークの家にはピアノが置かれていたし，飼い猫(というより通い猫か？)の名前がモザール(モーツアルト)だったことからすると，グロタンディークの「音楽好き」なこころは消滅していなかったように思う．しかし，グロタンディークは1991年夏にヴェリテ(仮名，第3次隠遁地)に転居する機会にピアノを(母親のデスマスクや長編自伝的小説の原稿を製本したものなどとともに)ヴレノムに譲っており，ヴェリテの家にはピアノはすでに存在しないようだ．

## 音楽のトポス

それはともかく，京子が2008年5月に，数学者でジャズピアニストでもあるマッツォーラ(Guerino Mazzola, 1947-)から聞いたところによると，マッツォーラは，ドイツ語で書いた『音の幾何学：数学的音楽理論の基本』(Geometrie der Töne: Elemente der mathematischen Musiktheorie)を1990年にグロタンディークに贈り，「これは新しい時代の数学だ」というような賛美の言葉をもらって誇らしげに感じたという．ところが，そのマッツォーラが，6年の歳月をかけて，この本のバージョンアップ版を英語で書き上げて2002年に出版した大作『音楽のトポス』(The Topos of Music)をグロタンディークに贈ったところ，この本はグロタンディークの創造したトポスの概念を音楽理論に応用したもので，グロタンディークに捧げられた本だったにもかかわらず，何のコメントもなしに送り返されてきた．1990年といえば，ぼくと京子が3月にグロタンディークを訪問した年でもある．グロタンディークは，この年の1月26日付けで「新しい時代＝解放の時代」(Nouvel Age = Age de la Libération)の到来を告げる「福音の手紙」を書いて，友人や知人たちに大量に送付したこともあり，「新しい時代」の到来を確信していたグロタンディークは，その時を迎える準備として周囲を覚醒させ癒す存在になろうとこころがけていたのかもしれない．1973年から1990年にかけての交流の中で，グロタンディークのこころの奥にある「やさしさ」に共感していたぼくや京子にとって，1991年夏以降のグロタンディークの「大変貌」は十分に理解できるものではない．ぼくたちのこころに響く激しい不協和音の謎を解明しようとして，2007年3月に，ぼくと京子はグロタンディークの隠遁先ヴェリテを探しだして家を訪ね，異例の超短時間ではあったが「会見」することもでき，その後もさまざまな情報(多くはグロタンディークの「異常性」についてのものだが)に接する中から，ぼくは，「大変貌」と不協和音の謎を解きうる「グロタンディーク論」の新しいヴィジョンが語れるようになったのだった．それはともかく，マッツォーラが京子に書いてきたところでは，トポスという幾何学的論理，というか「グロタンディークによる点概念の革命」を使えば，音楽のみならず能などの演劇(さらには絵画や彫刻などを含む芸術全体？)の「理論化」が可能になるのだという[8]．

### 参考文献


[1] Grothendieck,"Promenade à travers une oeuvre ou L'enfant et la Mère"
[2] Grothendieck, La Clef des Songes
[3] Bolle, Le Plateau Vivarais-Lignon Accueil et Resistance 1939-1944
[4] 山下純一『グロタンディーク』日本評論社 2003年
[5] Scharlau, Wer ist Alexander Grothendieck? (Teil 1: Anarchie), 2007
[6] Cohen et Malo, Les camps du sud-ouest de la France 1939-1944, Privat, 1994
[7] シュヴァルツ(弥永健一訳)『闘いの世紀を生きた数学者・上』 シュプリンガー・ジャパン 2006年
[8] Mazzola, La Vérité du Beau dans la Musique, IRCAM, 2007


(やました じゅんいち)



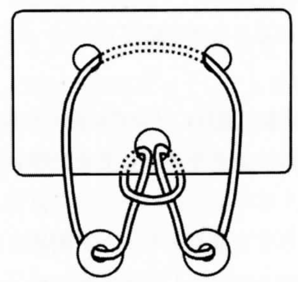
数学を楽しむ

# 柔らかい幾何学

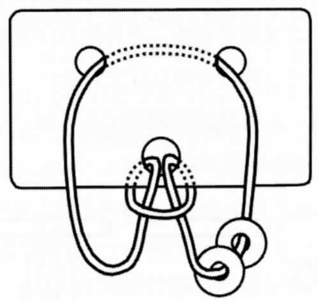
西山 豊

## 1. 五円玉パズル

ある雑誌の特集記事で一緒だった西森敏之氏の記事が目にとまり，五円玉パズルに挑戦することになった[1]．図1(1)に示すように五円玉が左右にわかれている．左にある五円玉を右側に移動して一緒にできないかというものだ(同図(2))．パズルの材料は，3つの穴を開けた長方形の板，五円玉が2個，そしてゴムひもが1本あればよく，誰でも簡単に作れる．ゴムひもを図のような経路で穴に通しておく．ひもは穴を自由に移動できるが，五円玉は穴より大きいので穴をくぐることはできない．こんなことができるのだろうか．一見不可能に見えるこのパズルは，意外な解答があるのだ．



(1) 左右にわかれた五円玉



(2) 右側に移動する

図1．五円玉パズル(参考文献[1]p14を模写)

このパズルは氏が「リスーピア」(パナソニックセンター東京)でイベント授業として2007年3月に紹介されている．独力でパズルを解いた子供も，解けなかったが説明を聞いてなるほどと思った子供もともに楽しめる，稀に見る優れものという説明に私も触発されて自分で作ってみることにした．

好奇心の旺盛な私は，思いついたらすぐに行動をおこさなくては気がすまない．この記事を読んだのは夜の10時頃で，部屋には板もゴムひももないので，とりあえず厚めの画用紙にハサミで穴を開けて，タコ糸を使って五円玉を通し，図1に近いものを作った．できあがったパズルをあれこれ操作しているうちにタコ糸がもつれて厚紙はぼろぼろになってしまった．そこでブーメランを作成したころの材料や道具が大学の研究室にあるのを思い出した．それできちんとパズルを作ってみようと自分に言い聞かせてその夜はあきらめた．

パズルは意外と簡単に作れた．板は3ミリのベニヤ板を使い，縦8センチ横12センチの寸法にして，糸のこぎりで切った．穴をあけるためには，まずキリで小さな穴を開けた．板厚が3ミリなので容易である．この小さな穴を手がかりに糸のこの刃を本体からはずして使い，穴を広げていけば大きくなる．そしてこの広げた穴に太目のドライバーを押し込んでぐりぐりと回せば，直径が5ミリのきれいな穴が開けられたことになる．ひもについては，説明ではゴムひもを通してあるが太目のタコ糸でもよい．

板で作ったパズルは頑丈で，タコ糸は切れないので操作の途中で壊れるという心配はない．私はこのパズルをあれやこれや操作したが一向に答えが見つからない．そこで，インターネットでこのパズルの解答が見つかるかもしれないと思い，パソコンで調

査する．1ヶ月近く悩んでいますというブログ記事もあった．そして五円玉パズルと構造が同じパズルが市販されているのを知った．それは「ご縁があったら」(監修･芦ヶ原伸之)という名称のものだった．

帰宅の途中に，DIY 店があるので「ご縁があったら」を買って帰る．これでパズルは解けたかと思ったが，それは甘かった．解答が入ってなかったのだ．当然のことだ．パズルは答えを聞くものではなく解く過程を楽しむものだ．製造者が答えを教えるということは楽しみを奪うことと同じである．それでも私は答えが早く知りたい．どうすればいいのか．商品のケースの中には，降参するなら返信用の切手を同封すれば答えを返送するとのことだった．この説明に反発して，何日かかってもよい，自分で解いてみようと思い直した．

あれこれ操作しているうちに五円玉が一回だけ右に移動したことがある．それがどういう手順であるかはわからなく，元に戻せなくなった．そこで，またインターネットで調べた．解答らしきものがあったが，それを見てもよくわからなかった．ただ概念図を示してくれるものがあり，それがヒントになりやっと自分で解けるようになった．このパズルは結構面白いので読者も興味があれば作って試してください．

## 2. アフリカンボール

五円玉パズルはいつごろ，誰が考案したのだろうか．秋山久義氏の『知恵の輪読本』の第2章には，「代表的な知恵の輪･名作ベストテン」があり，五円玉パズルは「アフリカンボール」という名前で第2位にランクされている[2]．このパズルは世界各国でいろいろな呼び方で，いろいろなバリエーションで楽しまれていることが紹介されている．

パチリオの『De Viribus』(1500年頃)には，この類のパズルの記述があり，「ソロモンの封印」の名で知られているとある．トポロジーの歴史はオイラー（1707～1783)に始まるが，トポロジーより先にトポロジー的なパズルが存在したことは興味深いことである．

欧米では1700年～1900年のさまざまな文献に記述があり，このパズルは多くの人に親しまれたようである．ただし,「アフリカンボール」の名称は登場していない．アフリカ先住民が荷運びに使うてんびん棒に似ているという説や，不幸な時代の黒人奴隷の逃亡や反抗を抑制するための首かせ，手かせの形に由来するという説がある．黒人の人形を本体にした金属製のパズル（The Jolly Nigger Puzzle）が大量に出回った時期があり,「アフリカンボール」の名前が広まったのではと秋山氏は推論する．

日本では江戸時代後期の天保（1830～1844）の頃に「知恵の糸」という，ひもの知恵の輪が親しまれていた．その中に「忍びの知恵越し」という名前で，ひもを通した2つの輪に，お染と久松の人形をつけたものがある．これはアフリカンボールと原理が同じで，恋物語に変身しているのは日本的である．

『知恵の輪読本』第4章には「構造から分類した4種類の知恵の輪」があり，アフリカンボールは「部品の移動タイプ」として分類され，位相幾何学の手法で原理が説明されている．

図1に示したように五円玉パズルの材料は，板とゴムひもと五円玉であった．五円玉は1個でも2個でも同じであるので1個として，この3つをモデル化してみる(図2)．

(1) 五円玉の穴はゴムひものリングに通っている．板を横長のリングとする．

(2) 横長のリングにゴムひもをかける．

(3) ゴムひもをひばり結び（グランベル結び）にする．

(4) ゴムひもを横長のリングに沿った位置におく．

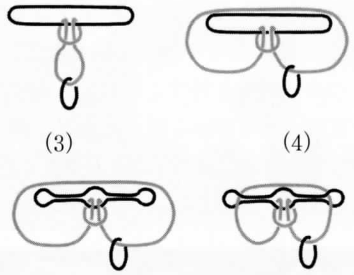
(5) 横長のリングを変形して中央部を孔（ホール）にする．

(6) ゴムひもを横長のリングの両端に通す．その後，両端を閉じるとアフリカンボールになる．

横長なリングが閉じてしまったため，五円玉は自由に行き来できなくなる．それでひばり結びの部分を何とかくぐり抜けなければならない．以上は，アフリカンボールの原理的構造であるが，これはパズルを解くための解答ではない．

(1)　(2)





(3)　(4)

(5)　(6)

図2．アフリカンボールの原理的構造(参考文献[2]p63を模写)

## 3. 人体浮揚術

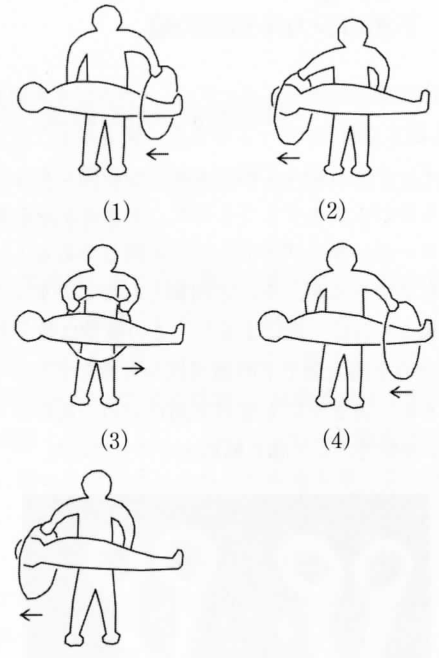
五円玉パズルを楽しみながら，私は1980年代に調査したことのある人体浮揚術のことを思い出した[3]．人体浮揚術については色々な方法があるが，ナポレオンズという2人のグループがおこなった種明かしをするコミックとしてのものがあった．1970年代のテレビには彼らがよく登場していた．

一人が仰向けになった状態で寝て，もう一人がそこに布をかぶせたあと，仰向けになった身体が宙に浮くように見せるというものだ．2つの椅子の上に頭と足を乗せるところまでは観客に見せるが，布をかぶせた後は偽の足と偽の胴体にすりかえるというもので，このトリックは人間の首に対する認識に目をつけていた．胴体と首はまっすぐにつながっているように思われるが，首は意外や90度近くまで曲げられるのだ．人間は垂直に立っていても首を90度近く曲げることによって水平にした偽の胴体を持ち上げることによって，あたかも空中浮揚が行われているかのように錯覚するのだ．このようなトリックが単純に笑えた1970年代はアナログテレビにとっての古きよき時代であった．

これは種明かしをすることで博した人体浮揚術であったが，種明かしをしないプロのマジシャンが披露したのは，ロベール・ウーダンによる方法と，ハリー・ケラーによる方法であった．これらは現在，種明かしがされていて観客の関心はまったくなくなっているが，舞台奇術（イリュージョン）の歴史を知る意味では重要なことであるので改めて紹介しておこう．

近代奇術の父といわれるロベール・ウーダン（仏，1805～1871）は，1本の竹棒に片腕を軽く触れているだけで，少年を地上に浮揚させる「空中少年」と呼ばれる奇術で人気を博した．その後，さまざまな浮揚術が考案されるが，ハリー・ケラー（米，1849～1922）によって完成された方法は，舞台イリュージョンの最高水準に達していた．

このイリュージョンの特徴は，金属製の輪を浮揚した人物の足から頭へ抜き取り，輪を手前を通過させ，そして念を押すかのように再び足から頭へと抜き取ってしまうのである(図3)．この方法は，支えがまったくないように思わせることでウーダンを超えている．ケラーは，この発案に15年もかかったという．



(1)　(2)

(3)　(4)

(5)

図3．輪通しは2回で完成する

この輪通しの術は最近ではMr.マリック等により種明かしがされ，その映像がインターネットに公開されている．奇術ファンにとっては残念なことであるが，種明かしがされてもそのトリックの不思議さには驚かされる．金属の輪には何の仕掛けもなく，人体がピアノ線で上から吊ってあるのでもない．また，超電導電磁石のように下から強力な磁場により浮いているわけでもない．

ヒントは輪通しは必ず2回やらねばならないということである．念を押すために2回輪を通すのではなく，2回通さなければイリュージョンが完成しないのである．これもトポロジーの応用である．マジシャンと人体が直につながっていればこのイリュージョンは不可能だが，マジシャンと人体が図4のよ

うにコの字形につながっていれば可能である．

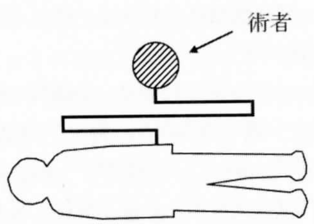



図4．コの字形につながっている

## 4. トポロジカル知恵の輪

瀬山士郎氏のホームページに「トポロジカル知恵の輪」と題する面白いページがある．図5のように2つ穴のドーナツに絡んだ輪ゴムがいつの間にか1つの穴から外れてしまうというものだ．トポロジーの世界ではコーヒーカップとドーナツが同じであるという話は有名であるが，その応用編としてこのような現象が起こるのだ．氏によると，この模型は数学教育協議会の全国大会で下町壽男氏から教えてもらったとあるが，あまりにも意外で面白いので氏のホームページを参考にして私も紙粘土で作ってみた．

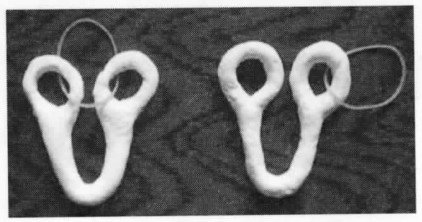


図5．輪ゴムを外せるか

図6が，その解法である．左上隅の模型では，輪ゴムは両方の穴に絡んでいるが，右下隅の模型では，輪ゴムは片方の穴にしか絡んでいない．もちろん輪ゴムもドーナツも切っていない．金属のような堅い素材であるとこのようなことはできない．紙粘土のように2つの穴のドーナツが完全に柔らかなものなら，図のような手順で輪ゴムをはずせるのだ．

手順は9ステップあり，左上隅から横方向に進んで右下隅まで行く．まず2つの穴を大きく広げていき，もともと穴でなかったところが穴になり，穴であったところが穴でなくなるという操作を経て輪ゴムが1つの穴に移動することになる．

確かに，不思議なことが起こる．理由はわかっていても不思議だ．私は，この模型を手に入れたくなって，何十年ぶりだろうか紙粘土を買って作ってみた．そして完成品をゼミ生に見せたところ，「輪ゴムを1つの穴からも外すことができますか」という新しい質問がゼミ生から返ってきた．図5右の状態から，輪ゴムを完全に外すことができるだろうか．読者の方で興味があれば考えてください．

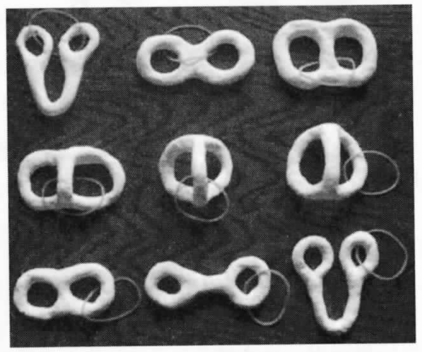


図6．9ステップで移動が完成する．

さて，応用問題をひとつ．図7左のように2つの輪が互いにリンクしている．このリンクを外すことができるだろうか（同図右）．紙粘土は柔らかく自由に伸び縮みできるので，可能である．手順がどうしてもわからない場合は参考文献[4]の189ページを参照のこと．今回のテーマは固定観念をいかになくすかであった．柔らかい幾何学を理解するためには柔らかい頭が必要であるということ，そして，このような素晴しい数学のアイデアが数学だけでなく社会や政治に生かされないのかと思うのであった．

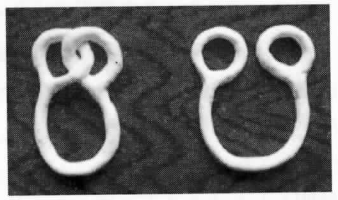


図7．応用問題（リンクを外せるか）

### 参考文献


[1] 西森敏之「5円玉パズルの数学的意味」『数学教育』明治図書，2008年2月号，pp.14－17

[2] 秋山久義『知恵の輪読本』新紀元社，2003年

[3] 西山豊「人体浮揚術の謎」『サイエンスの香り』日本評論社，1991年

[4] 野崎昭弘等『図形・空間の意味がわかる』ベレ出版，2003年，p189


（にしやま ゆたか／大阪経済大学）



# ゲーデルの不完全性定理

## 命題計算の完全性

第4回

北田 均

一般に形式的理論 $S$ が完全(complete)であるということは以前から述べてきたように「$S$ のいかなる命題 $A$ についても $A$ または $\neg A$ が定理である」ということであった．

いま $S$ を第3回で定義した命題論理とする．このとき式 $A$ がたとえば $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ のような式の場合，この式 $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ の真理値は命題変数 $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ の真理値の値により1になったり0になったりするため，式 $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ の真理値は定まらず，したがって前回の定理3.1で得た結果「命題論理の定理式は恒真式である」により式 $A$ は命題論理の定理ではない．このときはその否定 $\neg A$ の真理値も定まらず，やはり $\neg A$ も命題論理の定理ではない．したがって命題論理においては「完全性(completeness)」は成り立たないように見える．さらにこの議論から式 $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}$ はその肯定も否定も定理でないのだから命題論理の不完全性が成り立つように見える．

ここで第2回で述べた自然数論や一般の数学理論の場合，命題変数のような「命題自身」を変域とする変数は現れず，(個体ないし対象)変数記号に関する閉包[1]を取る限り，命題論理や後述の(述語変数を持つ)述語論理に特有の上述の問題は起こらないことを注意しておく．

[1] 一般に対象変数記号 $x_1, \cdots, x_n$ を全自由変数として持つ式 $A(x_1, \cdots, x_n)$ に対しその閉包とは $\forall x_1\cdots\forall x_n A(x_1, \cdots, x_n)$ のことである．後述第6回，定理6.4の証明も参照されたい．

### 4.1 拡張された命題論理

このような事柄の理解のために少々発見法的な直観的考察を行おう．

命題論理における定理は命題論理の公理から推論規則を経て演繹されるものの総体であった．この際公理に現れる命題式(たとえば公理1では $A$, $B$)は自然数論(等の数学的理論)の命題式全体を変域とする変数と考えてよい．このことから命題論理の各公理に現れる命題式はそれぞれ命題変数で置き換えてよい．たとえば公理1

$$A\Rightarrow(B\Rightarrow A)$$

において命題式 $A$, $B$ を命題変数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ によって置き換え

$$\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$$

と書いてよい．この場合前回の3.4節に述べたモデルの考え方ではこの式に現れる命題変数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ はおのおの自然数論の命題式全体を変域として動く自由変数と考えられる．そうすると公理1は図式的に

$$\forall\mathcal{A}\forall\mathcal{B}(\mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}))$$

と書いてよいであろう．ただし $\forall\mathcal{A}(\cdots)$ 等は直観的な意味で「自然数論の任意の命題 $\mathcal{A}$ に対し…が成り立つ(定理である[2])」ということと解釈するとする[3]．

[2] つまり「自然数論の定理である」という意味である．

[3] これは論理主義で言う2階の述語論理(second order predicate calculus)のある制限に対応する．本来のタイプ理論では命題変数 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 等は可算とは限らない無限個の命題全体を動く変数である．ここでは命題変数の変域は自然数論において再帰的に構成される命題式全体と考え，発見法的な直観的議論と思っていただきたい．