円の外周を転がる小円

西山　豊

大学から帰宅途中の電車の中で，ふと目に留まったのはつぎのような広告文だった．「半径1センチの小円が，半径4センチの大円の外周を転がって一周するとき，小円は何回転したことになるでしょうか」．これは有名私立中学の入試問題からとあった．

半径 r の円周の長さは $2\pi r$ で，半径 $4r$ の円周の長さは $8\pi r$ だから，$8\pi r \div 2\pi r = 4$ で4回転となるのでは，と思って解答を見ると5回転とあった．私はこの理由がすぐには理解できなかった．大円の円周の長さは $8\pi r$ で小円の長さは $2\pi r$ で，小円は大円に密着して転がるのだから4回転のはずで，5回転などなるわけないのだが．

5回転するという説明をみて，一応そうかなと思ったが，納得できるまでに時間がかかった．また，興味を引く面白い問題なので何人かに話してみたところ，私のように4回転だと即答し，間違いないと言い切る人が圧倒的に多かった．そして，5回転になるのが直観的にわかるという人は稀だった．

この問題はつぎのように考えるとよい．円周上を転がる前に，円周と同じ長さの直線上を転がることを想定してみる．距離が $8\pi r$ の直線上を小円が転がるのだから $8\pi r \div 2\pi r = 4$ で，これは明らかに4回転である．つぎに転がらずにすべって行くとして，直線上と円周上の違いは何かを考えてみる．直線上を $8\pi r$ だけすべって行くと，そのままの姿勢で目的地に到達するが，円周上の場合は，転がらずにすべって行くだけなのに1周すると1回転したことになる．それで，4回転に1回転たして5回転になるというのが正解だ．

このように，小円が大円の外周上を転がるときは，自転と公転の2つの運動が同時に起こっているのであり，4回転だと最初に考えたのは自転運動であり，これ以外に公転運動の1回転がある．自転は目に見えるのですぐに理解できるが公転は理解されにくい．

こういう問題は頭の中だけで考えるのは悩むだけで進展しない．それで，実験をして目で確かめることも大切である．たとえば，10円玉を2枚使って試してみよう．多くの人が予想するのは，同じ半径の円を使うので，$2\pi r \div 2\pi r = 1$ で1回転のはずであるが，実際のところ10円玉は2回転する．10円玉の上部から転がすとして下部に来たときは，半周であるから10円玉が逆さまになっていると予想するが，この時点ですでに1回転しているのだから不思議に思う．読者は試してください．

円周が理解しにくければ正方形の外側を転がることを考えてもよい．正方形は4つのコーナーがあるが，まず直線を進み，第1コーナーを曲がるとき90度余計に回転する．さらに直線を進み第2コーナーを曲がるとき90度余計に回転する．このようにして4つのコーナーを90度ずつ余計に回転するので90度×4＝360度で1回転することになる．他の方法として，微小区間 dt における回転を自転の成分と公転の成分に分解して作図することもできるが，問題をより複雑にしてしまうことになる．

以上の説明は，回転を自転と公転の成分にわけて説明したことになるが，実際はこのような分解は起こっていない．ヒトの心臓と肺が同時に動いているように，自転と公転は同時に進行しているのだ．自転だけを取り出したり，公転だけを取り出したりするのは理解の助けになるかもしれないが，本質的には解決しない．自分の頭脳は単細胞だから2つのことを同時に考えることはできない，というかもしれないが，同時に起こる現象は，やはり同時に理解できるようになることも大切である．

（にしやま　ゆたか）