数学を楽しむ

52巡回トランプ

西山　豊

1. カードを当てる

イギリスの知人からトランプを使った面白い手品がある，仕組みは秘密にして欲しいと言ってメールがきた．それは次の通りである．トランプのカードは1から13の数字と4種類の絵柄で合計52枚ある．それぞれのカードは数字と絵柄があり，絵柄には数字を対応しておく．たとえば，スペードは1，ハートは2，クラブは3，ダイヤは4というように．

現在のカードの数字を2倍して，上で定義した絵柄の数字を加える．計算結果が13を超えているなら13で割って余りを求める．これが次のカードの数字だ．その数字を参考にして次の絵柄が決まる．数字が1から3までなら今と同じ絵柄，4から6までなら同色の絵柄，7から9までなら前の絵柄，10から13までなら後の絵柄になる．

この法則で52枚のカードを並べておけば，すべてのカードをつぎつぎと当てることができるというのだ．本当だろうか．こんなことができるのだろうか．52枚のカードはある規則により巡回しているというので，ここでは「52巡回トランプ」と呼ぶことにしよう．

私は，半信半疑だった．この種の話はよくある話で，私は30年ほど前に手品に凝っていた時期があり，カードを当てるというのを経験したことがある．研究室のダンボール箱の中を探してみると当時集めた手品に図1のようなものが見つかった．マジックトランプというもので，トランプの裏の絵柄を見て，そのカードが何であるかを当てるというものだ．左がダイヤの9で，右がスペードの5である．手品にはもちろん仕掛けがしてあり，模様をよく見れば仕掛けはわかる．

今回のトランプの手品も，図1のようなマジックトランプの類であろうと，知人のメールにはあまり気乗りがしなかったが，調べてみるとこのような小手先ではなく，数学の原理を用いた手品であることがわかった．

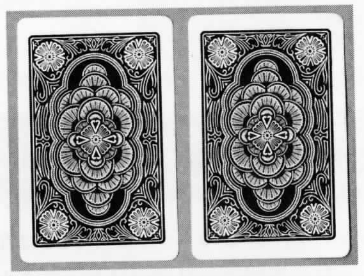

図1．マジックトランプ（左：ダイヤの9，右：スペードの5）

2. 52巡回トランプ

そこで，もういちど手順を詳しく説明しておこう．トランプは数字が1から13までである．数字の2から10はそのままであるが，数字の1はエースでAの文字が，11はジャックでJの文字が，12はクィーンでQの文字が，13はキングでKの文字が書かれている．絵柄は4種類あり，スペードとクラブは黒色，ハートとダイヤは赤色である．計算のため表1のように絵柄と数字の対応表を作成しておく．スペードは1で，ハートは2で，クラブは3で，ダイヤは4で，黒色と赤色が交互になるほうがよい．

スペード（♠）	1
ハート　（♡）	2
クラブ　（♣）	3
ダイヤ　（◇）	4

表1．絵柄に数字を対応させる

いま仮に一番上のトランプがスペード（♠）の8であったとして，次のカードを当ててみよう．数字の8を2倍して絵柄の数字を足す．スペード（♠）は1であるから，

$$8\times2+1=17$$

となる．トランプの数字は13までであり，17は13を超えているから13の倍数を引き，その余りを求めると4になる．

$$17-13=4$$

$$17=4 \bmod 13$$

これが次のカードの数字である．一般式では，現在の数字をn，絵柄の番号をsとすると，新しい数字mは，

$$m=n\times2+s \pmod{13}$$

となる．ただし，計算結果が13の倍数の場合は，13で割ると余りが0となるので，このときは数字を13とする．

そして，新しい数字mに対して，絵柄が表2のように決まる．数字が1から3までなら同じ絵柄，4から6までなら同色の絵柄，7から9までなら前の絵柄，10から13までなら後の絵柄となる．新しい数字mは4であるから，表2より4～6の同色の絵柄となる．スペード（♠）は黒色であり，同色の絵柄はクラブ（♣）になる．つまり，スペード（♠）の8の次はクラブ（♣）の4ということになる．

数字	絵柄
1～3	同じ絵柄
4～6	同色の絵柄
7～9	前の絵柄
10～13	後の絵柄

表2．数字と絵柄の対応

練習のため，クラブ（♣）の4のつぎを計算してみよう．クラブ（♣）の絵柄の番号は3であるから，新しい数字は，

$$4\times2+3=11$$

となる．11は数値が10～13の範囲にあるから，後の絵柄ということで絵柄はダイヤ（◇），つまり11のダイヤ（◇）ということになる．

規則と計算方法はわかった．それでも私は，この規則で52枚のすべてのカードを並べることができるのか疑問であった．表計算ソフトを使って，知人の説明するところを，ひとつずつ確認してみた．そして，つぎつぎと作り出されるカードの列が，52枚のすべてのカードを一巡するのを知って，私はある種の感動を覚えた．

参考までに，図2は52枚のカードが重複することなく巡回していることを示している．図は次のように見てください．左端の列には縦方向に数字の1（A）から13（K）までが並べてあり，上端の行には横方向に絵柄のスペード（♠）からダイヤ（◇）までが並べてあり数字の1から4までを対応させてある．

スペード（♠）のエース（A）の次を知るためには，その格子点のマス目をみると（3♠）となっているので，つぎはスペード（♠）の3ということになる．スペード（♠）の3のつぎは，その格子点のマス目をみると（7◇）となっているので，つぎはダイヤ（◇）の7である．読者は，この続きを2～3回計算することによって，図2の見方を理解してください．

図2は表計算ソフトを使って作成してもよいが，52回も計算しなければならないので，計算ミスや転記ミスの可能性がある．Visual BASICなどのプログラムでなら20行程度の命令文を書くだけで正確に求めることができる．私は，Visual BASICで処理して確認した後，その結果を図2のように清書した．

	1	2	3	4
	♠	♡	♣	◇
A	3♠	4◇	5♠	6♡
2	5♣	6◇	7♡	8♣
3	7◇	8♠	9♡	10♠
4	9◇	10♣	J◇	Q♠
5	J♡	Q♣	K◇	A◇
6	K♡	A♡	2♣	3◇
7	2♠	3♡	4♠	5♡
8	4♣	5◇	6♠	7♣
9	6♣	7♠	8♡	9♣
10	8◇	9♠	10◇	J♠
J	10♡	J♣	Q◇	K♠
Q	Q♡	K♣	A♣	2◇
K	A♠	2♡	3♣	4♡

図2．52巡回トランプ

図2は多くの情報を含んでいて理解しづらいので，便宜的に数字だけを示したのが図3である．これは先に示したように，次のカードの数字mは，現在の数nを2倍して絵柄の番号sを足す．そして13を超えるようだったら13で割って余りを求める．52個のマス目の中に，1から13までの数字がそれぞれ

4 個ずつ配置されていて，数字の上では問題ないことになる．

	1	2	3	4
	♠	♡	♣	◇
1	3	4	5	6
2	5	6	7	8
3	7	8	9	10
4	9	10	11	12
5	11	12	13	1
6	13	1	2	3
7	2	3	4	5
8	4	5	6	7
9	6	7	8	9
10	8	9	10	11
11	10	11	12	13
12	12	13	1	2
13	1	2	3	4

図 3. 数字の巡回

図 4 は計算された新しい数字と絵柄との対応である．1 から 3 は同じ絵柄で，4 から 6 は同色の絵柄で，7 から 9 は前の絵柄で，10 から 13 は次の絵柄でグループ分けがしてある．数字と絵柄を組み合わせることによってランダム度が増すことになっている．

	1	2	3	4
	♠	♡	♣	◇
1	3	4	5	6
2	5	6	7	8
3	7	8	9	10
4	9	10	11	12
5	11	12	13	1
6	13	1	2	3
7	2	3	4	5
8	4	5	6	7
9	6	7	8	9
10	8	9	10	11
11	10	11	12	13
12	12	13	1	2
13	1	2	3	4

図 4. 絵柄との対応

3. 1 から 52 までの乱数

トランプの枚数は 52 であるので，ここでは別の角度から 1 から 52 までの数字の乱数を生成することについて考えてみよう．

一般に，素数と原始根の関係を用いて擬似乱数を生成することができる．たとえば，素数 7 に対する原始根 3 の関係を用いると，つぎのように 1 から 6 までの乱数を作ることができる．

$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 3^1 \times 3 \equiv 9 \equiv 2 \bmod 7$$
$$3^3 = 3^2 \times 3 \equiv 2 \times 3 \equiv 6$$
$$3^4 = 3^3 \times 3 \equiv 6 \times 3 \equiv 18 \equiv 4 \bmod 7$$
$$3^5 = 3^4 \times 3 \equiv 4 \times 3 \equiv 12 \equiv 5 \bmod 7$$
$$3^6 = 3^5 \times 3 \equiv 5 \times 3 \equiv 15 \equiv 1 \bmod 7$$

原始根 3 のべき乗を計算していき，素数 $7-1=6$ を超える場合は素数 7 で割って余りを求めると，

$$3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5,\ 1$$

になる．これは，7 を法として 3^1，3^2，3^3，3^4，3^5，3^6 は巡回群となるとも言う．そして，乱数の性質である，前後の値に影響されないという「独立性」と全体を巡回するという「一様性」を満たしている．

一般に，素数 p と互いに素な数 r については，

$$r^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

の関係が成り立ち，これを「フェルマーの小定理」という．素数 p は必要条件で，素数以外の数は周期 $p-1$ の乱数が作れない[1]．

素数 7 に対する原始根のひとつが 3 であるように，素数 $p=53$ に対する原始根 r があれば，1 から 52 までの乱数を生成することができる．そこで，素数 53 に対して原始根となる数を 1 から 52 までの数字を Visual BASIC で調べてみた．そして，つぎの数が原始根 r になることがわかった．

2，3，5，8，12，14，18，19，20，21，
22，26，27，31，32，33，34，35，39，41，
45，48，50，51

である．読者はどの数を選んでも，53 回で元の数に戻ることを確認してください．

素数が 53 の場合は，原始根が 24 個あり，素数 53 で割ると約 45 % の比率で原始根が存在することになる．原始根が多く存在することは意外だった．これは，素数 53 の場合だけが特別に多いのだろうか．そこで，1 から 100 までの素数 25 個について原始根の数とその比率を調べてみると，原始根の比率が最大であるのは素数 83 に対して原始根が 40 個の 48 % で，最小であるのは素数 31 に対して原始根が 8 個の 26 % で，平均して 37 % であった．素数 53 の場合が特別に原始根の数が多いのでもなかった．

素数の分布が素数定理として知られているように，素数 p に対する原始根 r の個数は，p が無限大になるときどのような値に近づくのか興味があるところだ．これには近似式があるのだろうか．

以上，素数と原始根による 1 から 52 までの乱数について説明したが，この原理をトランプの手品に適用することは可能である．しかし，計算が複雑になり，暗算で答えを求めるのには難しく手品には現実的でない．

4. トランプはなぜ 52 枚か

現在，世界でもっとも多く使われているトランプは 52 枚のものである．トランプの枚数や絵柄は最初から決まっていたのだろうか．

トランプの起源については，いろいろな説があり，通説は確立していないが，東洋で発生し，ヨーロッパに渡り，発展していったという事は一致している．現在の形に近いトランプは，14 世紀後半に，ヨーロッパ各国に現われ，それ以後に図柄・形・枚数・名称など，国によって種々変化している．絵柄のスペードは剣の変形で軍閥・王侯を，ハートは洋盃で僧職を，ダイヤは貨幣で商人を，クラブは棍棒で農民を象徴しているとされる．52 枚が世界標準タイプとなったのは，19 世紀から 20 世紀にかけてイギリスやアメリカで，このタイプのものが流行したことと，当時の国際的な力関係による．

トランプの枚数が 52 枚についてはいろいろな俗説がある．たとえば，

(1) 4 つの絵柄は四季を示し，季節ごとに 13 週あるので 52 週となる．$13 \times 4 = 52$

(2) 1 から 13 までを合計すると 91 になり，これは季節の日数である．これに 4 をかけると 1 年の日数 364 になる．1 日足りないのでジョーカーが用意されている．もう一枚のジョーカーは閏年(1 年が 366 日)のためである．

(3) 1 から 13 の英文字 ace, two, three, …， king のすべてのスペルの文字を合計すると 52 になる．

(3) はともかく 2 枚のジョーカーの理由はもっともらしく思える．しかし，これらはまったく根拠がなく俗説であることが 1983 年に出版されたオルネイ・リッチモンドの本に示されている（英語版 Wikipedia，Playing Card の項より）．

さて，私は 52 巡回トランプを作る規則はこれだけなのだろうかと疑問に思った．そして Visual BASIC のプログラムを使って，数式や絵柄の対応表を変更してほかに規則が作れるか試してみた．すると，つぎの規則も 52 巡回トランプになることがわかった．

現在の数字を n，絵柄の番号を s とすると，新しい数字 m は，

$$m = n \times 3 + s \pmod{13}$$

とする．先の式では数を 2 倍したが，今回は 3 倍にする．そして絵柄との対応は，数字が 7 から 9 は同じ絵柄に，10 から 12 は同色の絵柄に，4 から 6 は前の絵柄に，1 から 3 と 13 は後の絵柄に変更する（表 3）．計算式と絵柄の対応を変えると別の 52 巡回トランプが作れることになる．

数字	絵柄
7 ～ 9	同じ絵柄
10 ～ 12	同色の絵柄
4 ～ 6	前の絵柄
1 ～ 3，13	後の絵柄

表 3. 数字と絵柄の対応(その 2)

他にも 52 巡回トランプの条件を満たす手順が見つかったが，計算の桁が大きく暗算には向かず，絵柄との対応も複雑になった．規則が単純で計算しやすいのは最初に紹介した規則であることは言うまでもない．

規則が唯一でないことがわかったのは私にとってひとつの発見だった．別解が存在することをイギリスの知人にメールで知らせた．彼は大変喜んでいた．この手品は他言しないでねと言われたが，日本の数学の雑誌に掲載することぐらいは了解してもらえると思う．読者は手持ちのトランプでいちど試してみてください．

参考文献

[1] 西山豊『数学を楽しむ』現代数学社，2007 年，pp.182–189，第 21 章「乱数の仕組みを明かす」

（にしやま ゆたか／大阪経済大学）