

近刊案内

ラングレーの問題に トドメをさす！

～4点の作る小宇宙完全ガイド～

齊藤 浩 著 A5判/予価 2,500円

「四角形 ABCD で $\angle ABD = 39^\circ$, $\angle DBC = 24^\circ$, $\angle BCA = 18^\circ$,
 $\angle ACD = 57^\circ$ のとき, $\angle BDA = 15^\circ$ となることを証明せよ」

——あのラングレーの問題を凌ぐモンスターのような難問たち
を攻略する過程で、読者はきつと初等幾何の深淵を垣間見ること
でしょう。

一部の未解決問題を除く全ての「4点の作る角度の問題」(整
数角では約5万問)の初等幾何による証明を構築する手法を、先
人たちの成果に新たに「線角を用いた一般化」という視点から光
を当て、豊富な具体例で分かりやすく解説し、必要なデータも完
全収録。さらに、初等幾何に留まらず、問題群の背後に広がる知
的好奇心を刺激して止まない数学世界を幅広く解説した「ラング
レーの問題」研究の決定版！



2009年2月上旬刊行予定

●内容紹介

第1部 4点角問題を初等幾何で証明する

17系統の1変数系列と4系統の2変数系列/線角を用いて系列毎に証明を一般化/円周角遷移と円
周角群/Rigbyの交線交換による非系列問題の生成/証明ルート攻略マップ 他

第2部 ラングレーの問題から広がる数学世界

偶然の二等辺三角形/正多角形の対角線の交点問題/ガウス平面の幾何学~代数的アプローチ/多
重立方8面体構造~有限群からのアプローチ/初等的未解決問題 他

第3部 4点角問題完全データベース

系列毎の全証明/証明経路情報/問題インデックス 他

現代数学社



音階にひそむ数理

西山 豊

小さい頃から数学と音楽が好きだった。ところが
音楽は高校1年の授業を最後に学問の対象からはず
れ趣味になってしまった。最近、あることをきっか
けに音楽について調べるようになった。

音の三要素は音の高さ、音の大きさ、音色でサ
イン波では波長、振幅、波形に対応するが、音色
についての知識は中学生で止まっていた。たとえ
ばドの音を鳴らすとしてもバイオリンとフルートでは
音色が異なる。その理由は、ほとんどの楽器は倍音
が同時に鳴っていてそれが重なった結果が音色にな
る。この考えを応用して音を合成するのがシンセサ
イザーである。

音楽は音階とリズムが大きな要素であるが、とく
に音階は数学と関係深いことが知られている。音階
はドレミファソラシドの7音階で表わされる。自然
の音には音階というものはなくアナログ的なもので
あるが、7音階はそれを強制的にデジタル化した
人工的な音階である。低いドと高いドの間を1オク
ターブと言い、1オクターブは5つの全音と2つの半
音の7つの音に分けられている。半音の位置はミと
ファ、シとドの間である。

ではなぜ7音階なのだろうか。実は7音階と見
るのではなく、1オクターブを半音が12個あると
考えるとよい。全音を2つの半音として計算すると
 $2 \times 5 + 1 \times 2 = 12$ になる。7音階は古代ギリシャを
起源とするが、古代中国でも三分損益法として確立
している。

西洋音楽が導入されるまで日本は5音階が主流で
あった。日本の民謡や琉球民謡は5音階でできてい
る。7音階(12律)は偶数と奇数の文化の融合とも思
えるし、5音階は人間の指が5本であることに関係
しているようだ。西洋の7音階と日本の5音階を融
合させたものに「ヨナ抜き音階」というのがある。7
音階の中で第4音(ファ)と第7音(シ)を抜いたドレ

ミソラドの5音階を用いたもので、日本の演歌や歌
謡曲に多用され、「北国の春」や「昴」などがそれ
にあたる。

音楽を専攻しなかった人にとって、全音は半音の
2倍であり、全音はすべて同じだと思っているので
はないだろうか。確かに平均律という音階は、すべ
ての全音すべての半音は等しい。平均律の考え方は、
1オクターブを12等分する。音程は音と音の振動数
比であるから等比数列として表される。1オクター
ブが音程の2倍になるから、2の12乗根が半音の
音程となる。たとえば、ドとソの差は平均律でいく
と、7個の半音であるから $(\sqrt[12]{2})^7$ であり、この値は
1.498となる。

この考え方はシンプルで分かりやすいが、音は弦
や管の長さに関係するから、すべての音階の振動数
比は整数比でなければ共鳴しない。古代ギリシャに
はピタゴラス律というものがあり、ピタゴラス律で
はドとソは完全5度として $\frac{3}{2}$ の整数比で表され、
その値は1.5である。ピタゴラス律から平均律への
移行には有理数から無理数への数学の発展を待たね
ばならなかったが、和音や共鳴を考えると、やはり
音程は整数比であるべきで、ピタゴラス律を改良し
た純正律などがある。

また、小さい頃からの疑問のひとつに長調と短調
がある。ドレミファソラシドのドから始めるとハ長
調になり、ラから始めるとイ短調になる。同じ音階
なのに始める位置を変えるだけで曲のイメージがず
いぶん異なるのはどうしてなのだろうか。おそらく
半音の位置が大きく関係しているのだろう。この理
由はいつか解き明かしてみたい。

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)