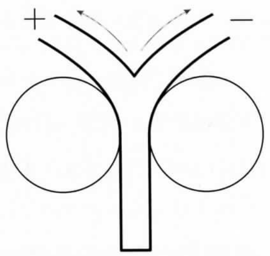
『その量が大きくなるほど曲がりぐあいが大きくなる』ことが望ましい.

**学生**：確かに，そうですね.

**先生**：そこで曲率半径の逆数，すなわち，$\frac{1}{\text{曲率半径}}$ を“曲率”と呼ぶ.

**学生**：“曲率”と引用符をつけたのはどうしてですか？

**先生**：実際の，平面曲線の曲率は，$\frac{1}{\text{曲率半径}}$ に±の符号をつけたものだからだ.




符号は，上のように決まります.

(先生を乗せた車．学生が運転している.)

**学生**：次の交差点は，どちらに曲がりましょうか？

**先生**：曲率が正の方向へ.

**学生**：えーっと．えーっと.

**先生**：早くハンドルを切って，あっ.

▶▶▶あとのまつり【後の祭】
①祭りのすんだ翌日.
②時機におくれてどうにも仕様のないこと．手おくれ.
広辞苑第五版より

**●練習問題１の答え**

(1) $C'(t)=(-a\sin t,\ b\cos t)$

(2) $C'(t)=(a\cos t-at\sin t,\ a\sin t+at\cos t)$

(3) $C'(t)=(a(1-\cos t),\ a\sin t)$

例３の曲線（サイクロイド）は，$t=2n\pi$（$n$ は整数）において $C'(t)=0$，すなわち，接ベクトル $C'(t)$ はゼロベクトルになっています.（図の“とがった点”に対応しています.）

**●練習問題２の答え**

$s(0)=0$ となるような弧長パラメーター $s=s(t)$ は

$$s(t)=\int_0^t\|C'(t)\|dt$$
$$=\int_0^t\sqrt{1+4t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\sinh^{-1}(2t)+\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2}$$
$$=\frac{1}{4}\log(2t+\sqrt{1+4t^2})+\frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2}$$

となります．ここで，$\sinh^{-1}x$ は双曲線関数 $\sinh x$ の逆関数です．与えられた曲線は $C(t)=(t,\ t^2)$ ですから，関数 $s(t)$ の逆関数を $t=t(s)$ として

$$C(s)=(t(s),\ t(s)^2)$$

としたものが，求める弧長パラメーター表示です.

「ずるい」と思った人は，「具体的な曲線を，よく知られた関数で弧長パラメーター表示することがいかに難しいか」が理解できた人です.

（なかうち のぶみつ／山口大学理工学研究科）



数学を楽しむ

# ストロー笛の数理

西山 豊

## 1. 音が鳴るまで

NHK のテレビ番組で「熱中時間」というのがあり，ストロー笛奏者の神谷徹さんが紹介されていた．ストローとはジュースを飲むときのあれで，ストローの飲み口を押しつぶし５ミリほどの切り口を入れると２枚のリードになって音が鳴り，穴をあけると音階になる．これを使って曲を奏で風変わりなパフォーマンスをされる神谷さんの姿を拝見して，もともと音楽好きだった私は自分でもストロー笛を作ってみたくなった.

さっそくストローを買ってきた．市販のストローは長さが 210 ミリの直径が６ミリで，飲みやすくするために折り曲げ可能になっているものもある．この折り曲げはストローを何本もつなぐときに効果を発揮する.

ストローの飲み口を押しつぶし，はさみで５ミリほどの切り口を入れると２枚のリードになる．それを吹くと音が出るが，音を出すのに一苦労する．それはストローがポリプロピレン製でかたく，復元力が働いてもとに戻ってしまうからである．元に戻らないためにクリップで留める，サンドペーパーを軽くかける，ライターで軽くあぶる，ミニアイロンを使って熱を加えながら押さえるなどの方法があることを神谷さんに教えていただいた.

吹き方であるが，リコーダー（たて笛）のようなゆるい吹き方では決して音が出ない．口を一文字にして力を入れて思い切り吹くと音が出る．私は中学生の頃ブラスバンド部でクラリネットを経験したことがあるので，リード楽器を鳴らすコツは覚えている．あれと同じように吹けば音が出た．この音色はなんともいえない．オーボエのような響きがある.

音が出れば曲を鳴らしてみたいものだ．チャルメラのメロディーはドレミ〜レド♪ドレミレドレ〜♪であった．ドレミの３つの音階さえあれば曲ができる．ストローに適当に穴を開けて鳴らすとチャルメラになった.

## 2. 基準音を定める

これに気を良くした私は，ドレミの３音階ではなくドレミファソラシドの７音階が鳴らせるストロー笛を作ってみたくなった．リコーダーを参考に適当に穴をあけてみたが，満足のいくものにはならなかった．穴の位置や穴の大きさには 500 年の進化の歴史があるそうで，そんなに単純ではないらしい．そこで，音程の正確なストロー笛にチャレンジすることになった.

まず基準となる音と管の長さを定めなければならない．音階の名前は表１に示すような３通りの方法があり，ほとんどの楽器は表１のようにドから始まりドで終わっている．しかし，基準音は A4（ラ）が 440 ヘルツと決まっている．ヘルツというのは振動数の単位で１秒間に 440 回振動するということである．人間には可聴音というのがあって，20 ヘルツから 15000 ヘルツないし 20000 ヘルツであるといわれているが，88 鍵のピアノは約 4000 ヘルツまでを A0（ラ）から C8（ド）までで作られている．A4（ラ）は

ピアノの鍵盤のほぼ中央にあり，これが基準音高となっている．

| ド | レ | ミ | ファ | ソ | ラ | シ | ド |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | D | E | F | G | A | B | C |
| ハ | ニ | ホ | ヘ | ト | イ | ロ | ハ |

表1　音階

管楽器はドの音から始まっているので，ストロー笛の基準音をC4(ド)とする．管が長いと低い音が，管が短いと高い音が出るが，C4(ド)とぴったりの長さを決めるためには調律が必要である．昔は，調律にU字型の音叉(おんさ)が使われていたが，最近では電子チューナーがあり，楽器用のものが安く手に入る．そこで，私は，これを購入した．たとえば，適当な長さのストロー笛を鳴らすと，この音を拾ってその音階が表示される．大変便利なものであるが，私は管の長さを調整しながらC4(ド)の音を管の長さが304ミリで実現した．

市販のストローは210ミリであるので，304ミリの長さにするには，ストローをつなぐ必要がある．セロテープでつなぎあわせてもよいが，わずかに直径の小さいストローを内側に入れて，ジョイント部として使うと取り外しができて便利である．

## 3. 音階は等比数列

音階はドレミファソラシドの7音階であるが，ミとファ，シとドの間が半音である．5個の全音と2個の半音で7音階ができている．低いドから高いドの音程差を1オクターブという．1オクターブは振動数にして2倍の音程になる．7音階と考えるより，この1オクターブを12個の半音に分割して12音階と考えた方が理解しやすい．全音を2つの半音として計算すると合計12個の半音となる．

$$5\times2+2\times1=12 \text{ (半音)}$$

基準音A4(ラ)は440ヘルツであるが，1オクターブ下のA3(ラ)は220ヘルツとなる．この間にあるC4(ド)は次に説明する平均律の考えで振動数が計算できる．

平均律は1オクターブを均等に12分割している．この場合，12分割は等差数列的ではなく，等比数列的であるということだ．A3(ラ)の振動数が220ヘルツであり，A4(ラ)の振動数が440ヘルツであるから，この差は220ヘルツである．差を12等分するのではなく，220ヘルツにある数値を12回かけて，それが440ヘルツになるということだ．

1オクターブは振動数が2倍になるから，2の12乗根が重要な値となる．

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.059$$

これが等比数列の公比となり，C4(ド)はA3(ラ)から数えると1つの全音と1つの半音であるから，合計3つの半音になり，前の定数を3乗すると振動数が262ヘルツとして計算される．

$$220\times(\sqrt[12]{2})^3 \approx 262 \text{ (ヘルツ)}$$

表2はC4(ド)からD5(レ)までの振動数を表計算ソフトで計算したものである．

| 音階 | | 平均律 | 振動数(ヘルツ) | 管の長さ(ミリ) |
|---|---|---|---|---|
| ド | C4 | 1.00 | 262 | 304 |
| レ | D4 | 1.12 | 294 | 268 |
| ミ | E4 | 1.26 | 330 | 237 |
| ファ | F4 | 1.33 | 349 | 223 |
| ソ | G4 | 1.50 | 392 | 197 |
| ラ | A4 | 1.68 | 440 | 173 |
| シ | B4 | 1.89 | 494 | 153 |
| ド | C5 | 2.00 | 523 | 143 |
| レ | D5 | 2.24 | 587 | 126 |

表2　音階の振動数と管の長さ

## 4. 開口端補正

チューナーによりストローの長さが304ミリでC4(ド)の音を実現した．また，C4(ド)からD5(レ)までの振動数もわかっている．そこで，これらをもとにD4(レ)からD5(レ)の穴の位置(管の長さ)を計算してみよう．

その前に私は，管の長さが304ミリであることが，振動数が262ヘルツとなるかどうかの確認計算をした．そこで，高校物理の時間に習ったつぎの公式を思い出した．

音速(m/s)＝振動数(回/s)×波長(m)

一方，音速については次のことが知られている．1気圧中の音速は摂氏温度$t$との関係で

$$331.5+0.61t$$

で表され，気温15℃での音速は約340m/sである．ここでは計算を簡単にするため340m/sとしておこう．

弦楽器の場合，弦の長さは波長の2分の1であることが知られている．これは弦の両端が固定されていて波の節になっているからだ．管楽器の場合，管の長さは波長の2分の1か4分の1である．これは管楽器が開管か閉管かに関係する．リコーダーやフルートは開管であり，管の両端が開いていて，両端は波の腹になっている．クラリネットは閉管であり，管の片端(吹き口)が閉じていて，一方が波の節に一方が波の腹になっている．

ストロー笛はクラリネットと同じく閉管であり，管の長さは波長の4分の1となる．リコーダーもストロー笛も管の長さが約30センチでありながら，リコーダーの方は1オクターブ音階が高くなるのは開管と閉管に関係している．

音速の340m/s，音階C4(ド)の振動数262ヘルツから管の長さを計算すると管の長さは325ミリとなった．

管の長さ＝波長／4＝音速／振動数／4
＝325ミリ

チューナーで調整したC4(ド)の管の長さは304ミリであるが，計算上の長さは325ミリである．21ミリの差がでた．この理由は何であろうか．調べてみると，一端を閉じた管楽器の場合，開口端より少し外側に振動の腹がくる．管の長さにその長さを加えたものの4倍が波長になるとある．このことを開口端補正という．管がなくてもその延長線上に管があるかのように空気が振動するのであろう．そこで次式となる．

計算上の長さ＝実際の長さ＋開口端補正

C4(ド)は262ヘルツで管の長さが計算上は325ミリとなるが，補正の21ミリ引いた304ミリが実際の長さとなる．表2の管の長さは開口端補正をした後の値である．

穴をあける位置は，管の長さで決まる．神谷さんは穴のあいていないストロー笛を吹きながら，ストローの先からハサミで切っていってドレミファソラシドの音階を演奏された．安価なストローでこそできるパフォーマンスであるが，音階は穴の位置ではなく，管の長さであることを再確認させてくれる．

管の長さは304ミリでC4(ド)の音であるが，D4(レ)は吹き口から268ミリ，E4(ミ)は237ミリの位置に穴をあけることになる．穴は一直線上に並べる必要がない．吹き口からの距離が同じであれば，その同心円上ならどこでもよい．実際に低いC4(ド)は右手の小指で押さえるから，直線上からやや右側にずらす位置にあり押さえやすくなっている．高いD5(レ)は左手の親指で押さえるから穴の位置は同心円上で180度回転した真裏になっている．

また，E4(ミ)とF4(ファ)の間，B4(シ)とC5(ド)の間は半音であるので全音より穴の間隔がせまい．そこで高いC5(ド)は定位置から少し距離を遠ざけて穴をあける．ただし，その分だけ穴の大きさは小さくすること．リコーダーの穴の位置と大きさは500年の進化の歴史があるそうで，人間が演奏しやすいように工夫されているようだ．

穴をあける方法は，ハサミで切り抜く方法や，半田ごて等で焼切る方法もあるが，文房具の一穴パンチを使う方がよいと神谷さんに教えていただいた．一穴パンチを使うと確かに上手く開けられる．このようにして手作りのストロー笛が完成した(図1)．私は好きな歌謡曲からフォークソング，クラシックまでを，この1本のストロー笛で楽しんだ．

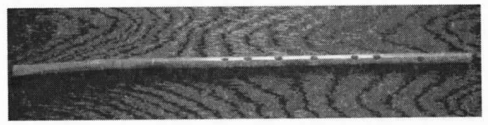


図1　手作りのストロー笛

約30センチのストローで1オクターブの笛を作ることができた．では60センチのストロー笛を作るとどんな音階になるのだろうか．私は，ストローの長さと音階に興味が移っていった．

その前に，音色について説明しておこう．楽器でC(ド)の音を鳴らしたとしよう．通常はこの音一つだけが鳴っているように聞こえるが，じつはかすかにそれ以外の音群が鳴り響いていて，これらの音を基音(C)に対する倍音という．基音と倍音は楽器の音色を形成する．同じC(ド)音でもフルートとバイ

オリンで違うように聞こえるのは，倍音を含む割合が違うからである．数学でいうなら音を周波数の異なるSin波に分解するフーリエ変換になる．フーリエ変換してもとめた各周波数のパワースペクトルは音色に関係し，これをもとにフーリエ逆変換すると音が生成できる．この原理を応用したものがシンセサイザーである．

倍音とオクターブの関係について説明しておこう．基音に対する2倍音は1オクターブ上の音階となる．3倍音なら2オクターブ上のように思えるが，実際は1オクターブ上で完全5度上(3/2倍音)のG(ソ)音である．

$$3=\frac{3}{2}\times 2$$

音階に対応する振動数は等比数列として表されるから，1オクターブは2倍音，2オクターブは$2^2=4$倍音，3オクターブは$2^3=8$倍音となる．管の長さは振動数に反比例して1/2倍，1/4倍，1/8倍 となる．逆に1/2倍音は1オクターブ下の音階となる．この場合は管の長さは2倍になる．

計算上はこういうことだが，ストローをつないでいくと音階がどうなるかを調べてみた．チューナーを使ってC音の長さを調べてみるとC4が304ミリ，C3が614ミリ，C2が1214ミリであった．C2は市販のストロー(210ミリ)を約6本つないだ長さであり，バス・チューバのような大変低い音階になった．また，ストローを短くするとC5が143ミリ，C6が69ミリとなり高い音階になった．オーケストラが演奏する7オクターブの幅は，ストロー笛だけでも可能なのではないだろうか．ただし，穴の位置と押さえる指の幅を考えると，304ミリのストロー笛が手頃であるように思えた．

## 5. ピタゴラス音律

ピタゴラスは実験で音階と和音について発見した．弦の長さを12等分して，12の長さで出る音をドとすると，9の長さでファ，8の長さでソ，6の長さで高いドがでること，そして，ド・ソ・ド(高い)は美しい和音になることを示した．

弦の長さを2/3にすることで，3/2高い音程を作った．これがドとソの関係で完全5度という．完全5度は全音が3個と半音が1個の音階の差である．同じく弦の長さを3/4にすることで4/3高い音程を作った．これがドとファの関係で完全4度という．完全4度は全音が2個と半音が1個の音階の差である．ドから始めて完全5度の関係を12回重ねると12個の半音すべてが実現するという．これは合同式で言うと，

$$a_n=a_1+(n-1)d \bmod p$$

$$d=7,\ p=12$$

となる．初項が1で公差が7の等差数列で，12を越えると12を引くという合同式となっている．ドから始まり($a_1=1$)，すべての値を経由したあと13回目でドにもどる．($a_{13}=1$)．表3は完全5度の無限音階で，横方向が$n$を縦方向が$a_n$を表している．

$$a_1=1$$

$$a_2=1+7=8$$

$$a_3=1+14=15 \bmod 12=3$$

$$\cdots$$

$$a_{13}=1+12\times 7=85 \bmod 12=1$$

| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ド | C | 1 | ■ | | | | | | | | | | | | ■ |
| | C# | 2 | | | | | | | | ■ | | | | | |
| レ | D | 3 | | | ■ | | | | | | | | | | |
| | D# | 4 | | | | | | | | | | ■ | | | |
| ミ | E | 5 | | | | | ■ | | | | | | | | |
| ファ | F | 6 | | | | | | | | | | | | ■ | |
| | F# | 7 | | | | | | | ■ | | | | | | |
| ソ | G | 8 | | ■ | | | | | | | | | | | |
| | G# | 9 | | | | | | | | | ■ | | | | |
| ラ | A | 10 | | | | ■ | | | | | | | | | |
| | A# | 11 | | | | | | | | | | | ■ | | |
| シ | B | 12 | | | | | | ■ | | | | | | | |
| ド | C | 13 | | | | | | | | | | | | | ■ |

表3　無限音階(完全5度)

ドとソの完全5度の関係だけで12個の音階が生成できることを説明したが，各音階の振動数比を求めてみよう．たとえば，レは3/2を2回かけるが1オクターブ上のレであるため，1オクターブ下げるため，これを2で割る．すると9/8になる．

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$$

このようにしてできたのが表4のピタゴラス律である．ピタゴラス律はドとレ，レとミ，ファとソ，ソとラ，ラとシの全音が$9/8=1.125$，ミとファ，シとドの半音が$256/243=1.053$である．厳密にいえば，全音は半音の2倍になっていないが，これらを掛け合わせると2になる．

$$1\times\frac{9}{8}\times\frac{9}{8}\times\frac{256}{243}\times\frac{9}{8}\times\frac{9}{8}\times\frac{9}{8}\times\frac{256}{243}=2$$

ピタゴラスが求めた音律は音楽というより数学の整数問題である．音は弦や管の長さに関係するので，すべての音階の振動数比は整数比でなければ共鳴しないので，ピタゴラス律は理にかなった理論であるともいえる．

ただし，3/2を12回かけ合わせた最後の周波数は

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\approx 129.7\approx 128=2^7$$

となり，7オクターブ上の$2^7=128$よりわずかに高い音階になっている．この差をピタゴラスコンマといい無視できない値である．そこで冒頭で示した平均律の考え方が登場する．

ピタゴラス律から平均律への移行には有理数から無理数への数学の発展を待たねばならなかった．また，ピタゴラス律を改良したものに純正律などがある．これらは，それぞれに長所と短所がある．

ストロー笛の作り方について親切に教えていただいた神谷徹さんに感謝します．

| | 平均律 | ピタゴラス律 | | 純正律 | |
|---|---|---|---|---|---|
| ド | 1.00 | 1 | 1.00 | 1 | 1.00 |
| レ | 1.12 | 9/8 | 1.13 | 9/8 | 1.13 |
| ミ | 1.26 | 81/64 | 1.27 | 5/4 | 1.25 |
| ファ | 1.33 | 4/3 | 1.33 | 4/3 | 1.33 |
| ソ | 1.50 | 3/2 | 1.50 | 3/2 | 1.50 |
| ラ | 1.68 | 27/16 | 1.69 | 5/3 | 1.67 |
| シ | 1.89 | 243/128 | 1.90 | 15/8 | 1.88 |
| ド | 2.00 | 2 | 2.00 | 2 | 2.00 |

表4　ピタゴラス律と純正律

**参考文献**

[1] NHK総合「熱中時間：ストロー笛熱中人」2008.6.11，神谷徹氏のホームページ(STRAW MUSIC)は以下です．http://www.straw-music.com/
[2]芥川也寸志『音楽の基礎』岩波新書E57，1971
[3]小島英幸『音階入門』音楽之友社，1996

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)