



西山 豊

数学を楽しむ 美しい定理

1. ある幾何の問題から

定期的に郵送されてくる数学のある会報につきのような問題があった。任意の四角形 $ABCD$ がある。各辺を1辺とする正方形を四角形の外側に描く。その正方形の中心を P, Q, R, S としたとき、その中心を結んでできた線分 PR と QS は長さが等しく、互いに直交していることを証明せよというのだ(図1)。私は、この問題を見たとき、美しい定理だと思った。何を持って美しいとするかは議論の分かれるところであるが、数学愛好家にとっては、無条件に美しいと思うのではないだろうか。

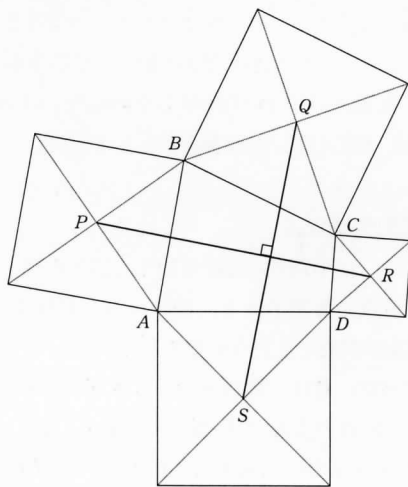


図1

私が、この問題を見て美しいと感じたのは、どんな四角形でも線分の長さが等しく、直交するという結果だけではなく、その証明方法が実に鮮やかであったからだ。以下、それを紹介しよう^[1]。

2. 複素数を用いた証明

四角形 $ABCD$ に対して、頂点 A を原点 O とする。ベクトル AB を複素数 $2a$ に、ベクトル BC を複素数 $2b$ に、ベクトル CD を複素数 $2c$ に、ベクトル DA を複素数 $2d$ に対応させる。ここで複素数の係数2は計算上の便宜的なものである。また、正方形の中心については、ベクトル AP を複素数 p に、ベクトル AQ を複素数 q に、ベクトル AR を複素数 r に、ベクトル AS を複素数 s に対応させる。

四角形 $ABCD$ は閉じているから、ベクトルを計算すると $2a+2b+2c+2d=0$ 、つまり、

$$a+b+c+d=0$$

となる。この条件で証明することになる。

点 P は点 A から点 B に向かって半分進み、90度方向を変えて半分だけ進むから、複素数 p は、

$$p = a + ia = (1+i)a$$

となる。ここに、 i は虚数単位で、 $i^2 = -1$ である。複素数は極形式 (r, θ) でも表現され、

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

であるから、 a に i をかけるということは半径 $r=1$ 、偏角 $\theta = \pi/2$ の複素数をかけるということであり、拡大縮小をとまわらない回転移動ということになる。

同様に、複素数 q, r, s は次のようになる。

$$q = 2a + (1+i)b$$

$$r = 2a + 2b + (1+i)c$$

$$s = 2a + 2b + 2c + (1+i)d$$

点 Q から点 S に向かうベクトルを A 、点 P から点 R に向かうベクトルを B とすると、 A は $s-q$ 、 B は $r-p$ であるから、

$$A = s - q = (b + 2c + d) + i(d - b)$$

$$B = r - p = (a + 2b + c) + i(c - a)$$

となる。

証明すべきは、線分 QS と線分 PR の長さが等しく、互いに直交していることであるから、複素数 A と B の関係が、

$$B = iA$$

を満たすことである。または、この式の両辺に i をかけて整理すると、

$$A + iB = 0$$

となり、この式で証明してもよい。実際に計算すると、

$$A + iB$$

$$= (b + 2c + d - c + a) + i(d - b + a + 2b + c)$$

$$= (a + b + c + d) + i(a + b + c + d) = 0$$

となる。

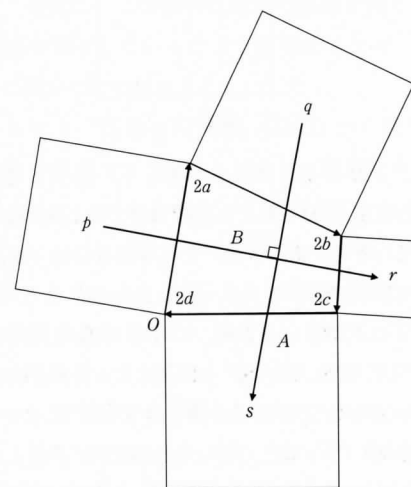


図2

実に鮮やかな証明である。でも何か物足りなかった。それは、複素数でしか証明できないものだろうかという疑問である。これは後述するとして、文献[1]には、図1を証明するための前段階として図3が示されていた。

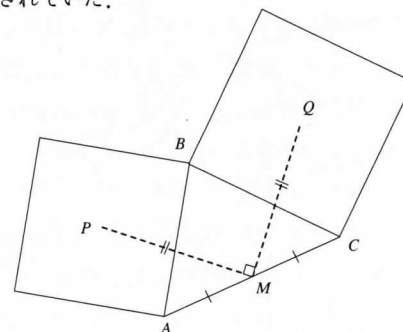


図3

図1の四角形 $ABCD$ において、辺 AB と辺 BC を残した三角形 ABC を考える。辺 AB と辺 BC の外側に正方形を作画し、正方形の中心を P, Q とする。残りの辺 CA の中点を M とし、 M から P と Q に線を引くと、線分 PM と線分 QM の間には、

$$PM = QM, \quad PM \perp QM$$

の関係がある。これを証明するために図2と同じように複素数を用いることもできるが、ここでは幾何学的な意味を考えてみよう。

複素関数を用いて平行移動や回転を調べることができる。点 p を中心に $\pi/2$ 回転したものを $R_p^{\pi/2}$ 、点 q を中心に $\pi/2$ 回転したものを $R_q^{\pi/2}$ 、点 m を中心に π 回転したものを R_m^{π} とし、3つの回転による合成関数を M とすれば、

$$M = R_m^{\pi} \circ R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2}$$

となる。ここで、 $\pi/2 + \pi/2 + \pi = 2\pi$ より、回転角の合計が 2π の整数倍になるので、 M はある点 v に対して平行移動した T_v に等しくなる。

平行移動について調べるため、ある点 k に注目してみると、 $M(k) = k$ であるので、 M は0の平行移動、つまり恒等変換である。したがって、

$$R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2} = (R_m^{\pi})^{-1} \circ M = T_m^{\pi}$$

である。 $p' = R_m^{\pi}(p)$ と定めれば m は pp' の中点になる。一方、

$$p' = (R_q^{\pi/2} \circ R_p^{\pi/2})(p) = R_q^{\pi/2}(p)$$

より、 p' は p を、点 q を中心に $\pi/2$ 回転したものである。したがって pqp' は直角二等辺三角形となり、 pm と qm は直交し同じ長さをもつ(図4)。

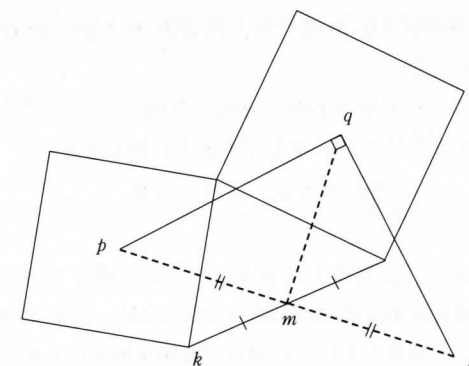


図4

3. 初等幾何による証明

証明はこれでよいのだが、複素数を用いなくても証明ができないかと考えた。まず図3の証明を考えてみよう(図5)。

辺 AC の中点を M_1 、辺 AB の中点を M_2 、辺 BC の中点を M_3 とする。 $M_2P = M_2B$ かつ $M_2P \perp M_2B$ であり、 $M_3Q = M_3B$ かつ $M_3Q \perp M_3B$ である。そこで M_2B を M_1M_3 へ、 M_3B を M_1M_2 へ平行移動すれば $\triangle PM_1M_2$ と $\triangle QM_1M_3$ は2辺がそれぞれ等しく、夾角が $90^\circ + \angle B$ で等しくなるから合同となる。そして、

$$PM_2 \perp M_1M_3, \quad M_1M_2 \perp QM_3$$

であるから、残りの辺 PM_1 と QM_1 は長さが等しく垂直となる[2]。複素関数でいえば、点 M_2 を中心に $\triangle PM_1M_2$ を $\pi/2$ 回転させ、 M_2 から M_3 の方向に平行移動すると $\triangle QM_1M_3$ になる。

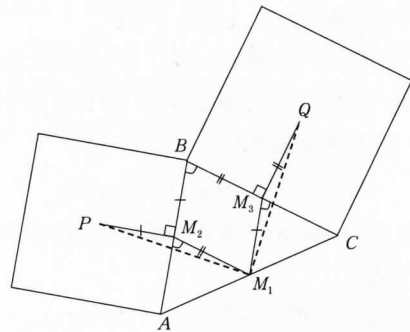


図5

図3による結果を2度使うと、図1が証明できる。任意の四角形 $ABCD$ において対角線 AC を引き、その中点を M とする。正方形 P と正方形 Q に関しては、

$$PM = QM, \quad PM \perp QM$$

が成り立ち、正方形 R と正方形 S に関しては、

$$RM = SM, \quad RM \perp SM$$

が成り立つ。

ここで $\triangle PMR$ と $\triangle QMS$ について考えてみよう。対応する2辺は、 $PM = QM$ 、 $RM = SM$ で等しく、夾角はともに $\angle QMR$ に直角を加えたものであるので等しいので、

$$\triangle PMR \cong \triangle QMS$$

である。また、これらは点 M を中心に 90° 回転しているから

$$PR = QS, \quad PR \perp QS$$

となる。 PR と QS の交点は F となり、一般的に点 M とは異なる。

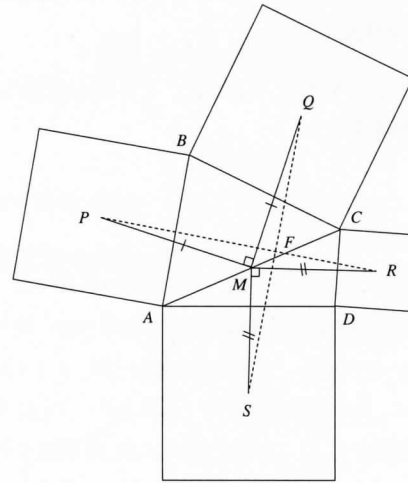


図6

さて、 PR と QS は長さが等しく、直交しているが、その交点 F はそれぞれの線分をどのような比率で内分しているのだろうか。それを知るには、正方形の中心の間を結んで PQ 、 QR 、 RS 、 SP とすると、 $\triangle FQP$ 、 $\triangle FRQ$ 、 $\triangle FSR$ 、 $\triangle FPS$ は直角三角形となる。 PQ 、 QR 、 RS 、 SP を直径とする外接円を描くと、これらは点 F で交わる。隣り合う外接円によってできる共通の弦 PF 、 QF 、 RF 、 SF の長さが PR と QS の内分比を決めている(図7)。四角形 $ABCD$ が正方形、ひし形、長方形、平行四辺形の場合は四角形 $PQRS$ が正方形になり、 PR と QS は互いに他を2等分している。

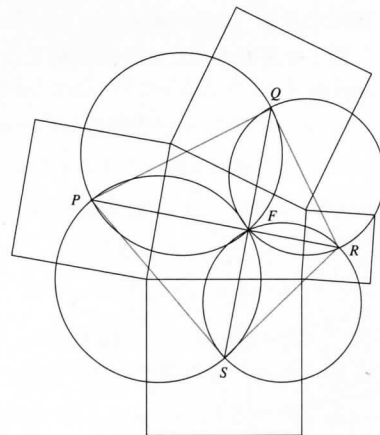


図7

4. Van Aubel の定理

私が今回の問題を知って全体を把握するのに約2週間かかった。最初のうちは、こんなことが可能なのだろうか、さまざまな四角形 $ABCD$ を作図して試してみた。正方形、ひし形、長方形、平行四辺形などの場合は自明で2つの線分は長さが等しく直交していた。等脚台形の場合は、直交性は自明だが長さが等しい証明は難しかった。一般の台形になるとまったくのお手上げだった。

そこで、四角形 $ABCD$ の頂点の座標を入力して線分がどうなるかを調べた。直線の方程式から交点の座標を求めようとしたが式の展開が複雑になってきた。それに、この試みは定理の結果を使って、その確認作業をしているだけで証明にはなっていないことに気がついてやめることにした。

それでも、任意の四角形 $ABCD$ から線分 PR と QS を作図できるソフトがあれば便利だろうなと思っていた。インターネットで調べていたところ、私がイメージしていたそのものズバリが見つかった。アプレット(Java Applet)とよばれる小さなプログラムで作成されたもので、販売までされているのを知り、時代の変化を感じた。四角形 $ABCD$ の各頂点をドラッグすると、それぞれに対応する正方形が変化し、線分 PR と QS が変化していく。いかに頂点を動かそうとも2つの線分は直交しなおかつ長さが等しいことが確認できる。

私がこの幾何学の問題を見て新鮮に映ったのは、日本ではあまり紹介されていなかったからだ。そこでこの問題のルーツ探しをしてみた。1971年出版の『幾何学大辞典 第1巻』のp296には387番目の問題として紹介されていて、初等幾何学による証明と複素数による証明の2つが掲載されている。386番目がMorleyの定理(三角形の頂角の3等分線の辺に近い2つずつの交点は正三角形を作る)であり、「有名な定理」として分類されているが、名前もついでにそれほど知られていないのが不思議である。

一方、欧米ではこの問題を示すWebサイトをよく見かける。関連して図8のような例がある。正方形 $ABCO$ と正方形 $PORQ$ が点 O でつながって

いて、正方形の頂点間に線分 AP と線分 CR を引き、それらの中点を K 、 L とし、正方形の中心 M 、 N と中点 K 、 L を結んで四角形 $MKNL$ を作ると、これは正方形になる。証明は図3または図5を2回、適用すればできる。

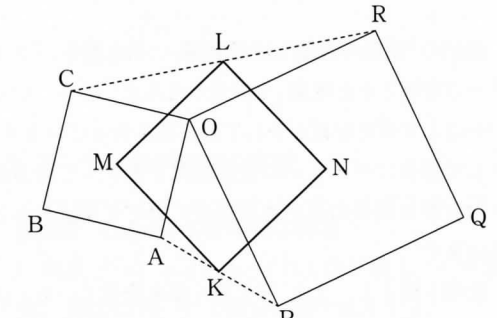


図8

また任意の三角形 ABC の外側に、各辺を1辺とする正三角形を描き、それらの重心を結ぶと正三角形になる。これはナポレオンの定理として紹介されている。

実に美しい定理である。これらの定理のルーツを調べてみると、1878年のVan Aubelの文献にまで遡ることができた[3]。日本ではあまり知られていない数学者であるが、この美しい定理はVan Aubelの定理としておこう。

高校数学の教科書の中から平面幾何が削除されて久しくなった。削除の理由のひとつに大学入試改革がある。それまで記述式であった入学試験の問題がマークシート方式にかわって、幾何学の問題が出題できにくくなったことだ。少子高齢化で学生の数が減少してきているので、入学試験を記述式に戻し、幾何学を大胆に復活させてみてはどうだろうか。

参考文献

- [1] T. ニーダム, 石田久ら訳『ヴィジュアル複素解析』培風館, 2002年
- [2] 岩田至康編『幾何学大辞典 第1巻』槇書店, 1971年, 123ページと296ページ
- [3] M. H. Van Aubel, Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygone quelconque, Nouv. Corresp. Math., 4(1878), 40-44

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)