

逆に、平面： $aX+bY+cZ+d=0$ の逆像が

$$\frac{2ax+2by+c(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2+1}+d=0$$

$$\Leftrightarrow (c+d)x^2+(c+d)y^2+2ax+2by-c+d=0$$

なので、 S 上の円の逆像は

Q_∞ を通る($c+d=0$)なら、直線

Q_∞ を通らない($c+d \neq 0$)なら、円

である。

以上より、 f による像、逆像は、次のようになる：

直線 $\Leftrightarrow Q_\infty$ を通る円

円 $\Leftrightarrow Q_\infty$ を通らない円

原点 O を通る図形 $\Leftrightarrow (0, 0, -1)$ を通る図形

無限に続く図形 $\Leftrightarrow Q_\infty$ を通る図形

<反転関係の射影>

点 P と、その反転の位置にある点 Q の射影は、

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1),$$

$$f(x', y') = \frac{1}{x'^2+y'^2+1}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}-1\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, -(x^2+y^2-1))$$

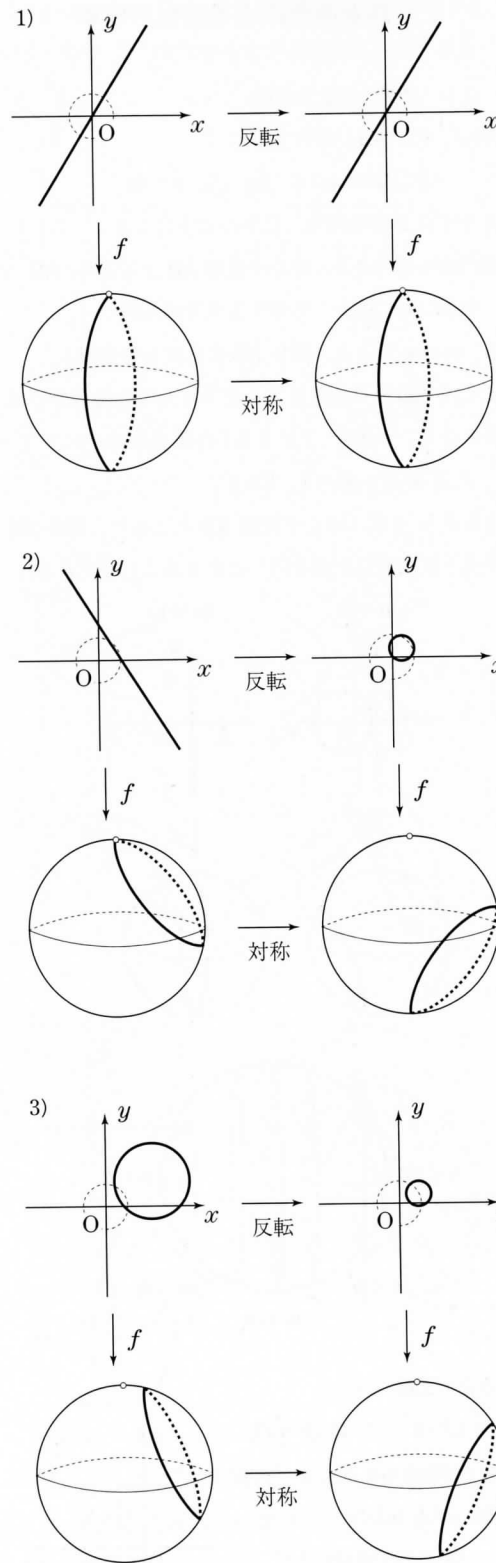
である。よって、反転関係にある2つの図形は、“射影すると XZ 平面に関して対称な位置関係”になっている。

☆ <直線、円の射影>と<反転関係の射影>を利用すると、<反転に関する有名な性質>は明らかである！つまり、 XZ 平面に関する対称移動により、

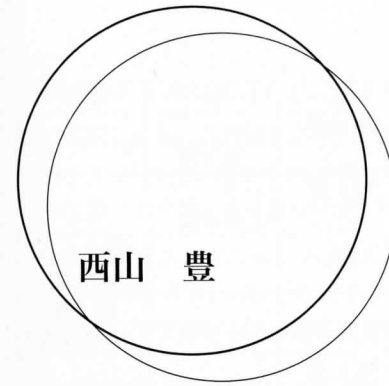
$$Q_\infty \Leftrightarrow (0, 0, -1)$$

なので、反転により、

原点を通る図形 \Leftrightarrow 無限に続く図形
と移り変わる。この様子を右にまとめておく。



(よしだ のぶお/研伸館)



数学を楽しむ

短調について考える

1. ラから始めるとなぜ物悲しく

音階はドレミファソラシドのドから始まるが、ドの2つ下のラから始めると短調になり、物悲しくなる。こんな話を聞いたのは小学生の音楽の時間だった。童謡の「赤い靴」「月の砂漠」がそうだと教わった。ドからではなくラから始めると、確かに曲の感じが変わる。同じ7つの音階を使いながら音階を2個ずらすだけでどうしてこのように違うのだろうか。疑問が解決されないまま50年が過ぎてしまったが、今回は音楽を数学的に推論してみよう。

長調のドレミファソラシドと短調のラシドレミファソラを全音と半音で表すと、

「全全全全全全半」と「全半全全半全」

になる。どちらも全音の数が5個、半音の数が2個の計7個の音階で同じであるが、半音の位置が長調は前から3番目と7番目、短調は2番目と5番目の違いがある。半音の位置が違うだけで曲の感じがこれほど変わるのも不思議である。ピアノの鍵盤でドから始めると明るい曲になるが、ラまたはミから始めるともの悲しい曲になる。「エリーゼのために」、禁じられた遊びのテーマ曲「愛のロマンス」、「トルコ行進曲」など。

2. 長3度と短3度がカギ

私の疑問に明快に答えてくれる説明はないものかとずいぶん探したが、完全な解答はなかった。それでは自分でその理由を考えねばならない。芥川也寸

志は『音楽の基礎』(p67)で長音階と短音階を階段状に図表化し、「短音階が長音階と異なる決定的な点は、基音と第三音との距離が短いこと、つまり音程がせまいことであり(長音階は長三度、短音階は短三度)、ここに長音階 Major scale と短音階 Minor scale の命名の由来がある」と説明している [1]。

小島英幸は『音階入門』(p87～88)で芥川のもものをさらに詳しく図化したものがあるので、これを図1に示しておこう [2]。左側が長音階(長調)でドを基礎の音(基音)としてレミファ…シドと続く。ドは完全1度、レは長2度、ミは長3度、ファは完全4度、ソは完全5度、ラは長6度、シは長7度、そして高いドは完全8度である。このような音程の名称については後述する。右側が短音階(短調)でラを基音としてシドレ…ソラと続く。ラは完全1度、シは長2度、ドは短3度、レは完全4度、ミは完全5度、ファは短6度、ソは短7度、そして高いラは完全8度である。

8	ド		ラ	8
長7	シ			
長6	ラ			ソ 短7
5	ソ			ファ短6
4	ファ			ミ 5
長3	ミ			レ 4
長2	レ			ド 短3
1	ド			シ 長2
				ラ 1
		長音階	短調階	

図1 長調と短調の音階図(文献[2]を参照)

小島は「完全4度および完全5度の他は、各音がすべて長音程になっているものが長音階であり、第2音以外が短音程になっているものが短音階である。短音階の曲は長音階の曲より暗いといわれることが多いが、この説に反対する反論もかなりある」と説明する。図1の左右を比較すると、1, 4, 5, 8は同じでこれらは完全4度、完全5度などと呼ばれる。その他の音程を示す数字には左側は「長」ばかりが、右側はひとつを除いて「短」がついている。これらに長調と短調で曲の感じが違う理由があるのだろう。芥川は特に長3度と短3度の違いを強調している。

3. 音程とは

2音の高さのへだたりは一般的には度数で示す。同じ高さの音を同度(1度)とする。同じ数字で示される度数でも、そのへだたりは異なる。通常的全音階的音程には次のようなものがある。

- 短2度(半音)と長2度(全音)
- 短3度(半音と全音)と長3度(全音2つ)
- 完全4度(半音1つと全音2つ)と増4度(全音3つ)
- 減5度(半音2つと全音2つ)と完全5度(半音1つと全音3つ)
- 短6度(半音2つと全音3つ)と長6度(半音1つと全音4つ)
- 短7度(半音2つと全音4つ)と長7度(半音1つと全音5つ)

以上をもう少し整理して、音のへだたりを小さい順から大きい順に並べた(表1)。半音にすると1オクターブは12個の半音でできているから、1つ引いた11個の段階がある。半1は半音が1つ、全1は全音が1つ、半1+全1は半音が1つと全音が1つの意味である。こうすると、音程が2度には短2度と長2度の2通りが存在することになる。同様に音程が3度にも短3度と長3度の2通りが存在することになる。「完全」、「長」、「短」の分類とは例外として全音が3つの「増4度」と半音が2つと全音が2つの「減5度」がある。どちらも半音の数にすると6個で同じへだたりとなる。

	短	長	完全
半1	短2度		
全1		長2度	
半1+全1	短3度		
全2		長3度	
半1+全2			完全4度
全3			増4度
半2+全2			減5度
半1+全3			完全5度
半2+全3	短6度		
半1+全4		長6度	
半2+全4	短7度		
半1+全5		長7度	

表1. 全音階的音程

4度と5度については「長〜」「短〜」に相当するものがなく、完全4度(半音が1つと全音が2つ)と完全5度(半音が1つと全音が3つ)が短調と長調の両方に存在する。そして、これだけでは長調と短調の区別がつかない。音階でいうと、完全4度は長調ではドとファ、短調ではラとレの関係、完全5度は長調ではドとソ、短調ではラとミの関係である。

「完全〜」と呼ばれるものには、1度、4度、5度、8度の4種類がある。完全1度は同じ高さの音であり、完全8度は1オクターブ上の音であり、音の高さは2倍になり、弦の長さではその逆数の1/2で実現できる。完全4度と完全5度にはどういう意味があるのだろうか。

古代ギリシャのピタゴラスは、音の実験をモノコード(1本の弦を共鳴箱の上に張り、駒を移動させながら音高を変える楽器)を使って行った。弦は12の部分に分割され、12, 9, 8, 6の4つの数を組み合わせながら、さまざまな比率を生み出した。弦の長さを2/3にすることによってドとソの音程を、3/4にすることによってドとファの音程を決めた。ドとソは音程が3/2倍であり、完全5度とよばれる。ドとファは音程が4/3倍であり、完全4度とよばれる。完全5度は、ドとソの関係を上または下に12回重ねることで、12個の音階(半音を含む)を生成することができるので特に重要である。このような音階は古代中国でも「三分損益法(さんぶんそんえきほう)」として知られている。

音階とは音の階段で、1オクターブの間を一定の間隔で音の高さ順にならべたものである。オク

ターブ間の12個の半音の上に、それぞれの調性があると考え、長音階を基礎とする12、短音階を基礎とする12のあわせて24が調性の数ということになるが、ハ長調とイ短調を代表としても問題ない。また、古代ギリシャには7つの実用的な音階があったが、その中でドから始まるイオニア旋法とラから始まるエオリア旋法が長音階と短音階として発展することになる。

さて、図1ではラから始めるエオリア旋法を短音階としたが、短音階にはこれ以外に旋律的短音階と和声短音階がある。第6音または第7音に#がつけられているものがそれで、#をつけずに変化しないものを自然短音階と呼んで区別している。自然短音階ではラから始めて最後のほうのソとラでは短調を表現できないのでその工夫であろう。

ラシドレミファ#ソ#ラ (旋律短音階)

ラシドレミファソ#ラ (和声短音階)

ラシドレミファソラ (自然短音階)

音は物体の振動が空気の振動として伝わって起こすもので、人間の聴覚が知覚できるのは20Hzから20000Hzの範囲である(可聴域)。ヒトは咽頭の上にある声帯を振動させて音を発生させ、内耳にある鼓膜に伝えられた空気の振動は、耳小骨を経て聴覚神経に伝えられる。ヒトは音を連続的に発生し、かつ音を連続的に聴き分けることができる。風の音や川のせせらぎなど自然の音には音階がない。音階は人工的なものである。自然の音が明るくまたは暗く感じたりしたら、それは受け手の感性であろう。

4. 長和音(メジャーコード)と

短和音(マイナーコード)

ハ長調の曲は曲を構成するすべての小節が明るく、イ短調の曲は曲を構成するすべての小節が暗いのだろうか。それを断言することはできない。ひとつの曲は節にわかれ、節は小節に分かれる。文章で言うと、段落、文と文節の関係になる。曲全体というより、それぞれの部分(節や小節)が問題となる。

ヒトの音域は、個人差もあるが1オクターブと3度と言われている[4]。長調と短調を論じる場合、

音域は関係しない。また、7音階のすべてを使うと長調と短調の区別がなくなってしまうのは自明である。もっとせまい範囲の音の高低が問題となる。ここで、和音の概念が重要になってくる。

基音に3度と5度の音を重ねたものが和音である。長3度(全音が2つ)と短3度(全音が1つと半音が1つ)を重ねたもので、長3度+短3度としたものが長和音、短3度+長3度としたものが短和音である。ここでも、長3度と短3度が重要なカギとなっている。たとえば、ド・ミ・ソの3つの音を同時にならした音をCメジャーという。基音(キー)がド(C音)であるから、この名前がある。ラ・ド・ミの場合には基音がラ(A音)であり、短3度+長3度の組み合わせであるからAマイナーという。

そして、コード(和音)の組み合わせで曲が作られる。コードの組み合わせをコード進行ともいう。コードの組み合わせは無限に作れるが、ギター・コードの基本パターンを、ハ長調とイ短調について示しておこう。

(1)ハ長調(Cメジャー)

C-F-G

C-G7-C

C-F-G7-C

C-Dm-G7-C

C-Em-Dm-G7-C

C-Am-F-G7-C

(2)イ短調(Aマイナー)

Am-Dm-Em

Am-Em-Am

Am-Dm-Em-Am

Am-Bm-Em-Am

Am-C-Bm-Em-Am

Am-F-Dm-Em-Am

コード名	和音	
C	ド・ミ・ソ	長3度+短3度
Dm	レ・ファ・ラ	短3度+長3度
Em	ミ・ソ・シ	短3度+長3度
F	ファ・ラ・ド	長3度+短3度
G	ソ・シ・レ	長3度+短3度
Am	ラ・ド・ミ	短3度+長3度
Bm	シ・レ・ファ#	短3度+長3度

表2. ハ長調での基本和音

ギターでコードを引く場合は、押さえやすいコードと押さえにくいコードがあるのは事実である。1970年代のフォークソングが全盛期のころは、ほとんどの学生は下宿や寮にギターを持って音楽を楽しんでいた。コードのFやG7は押さえにくく、EmやDmは押さえやすく、結果として短調の曲が弾きやすかったのかもしれない。

「旅人よ」(作詞：岩谷時子、作曲：弾厚作)は二短調の曲であるが、マイナーコードとメジャーコードを交互に繰り返すことでできている。歌詞とそれに対応するコードを示すとつぎのようになる。

風にふるえる 緑の草原 Dm-Dm-Dm-Dm
たどる瞳輝く 若き旅人よ F-Gm-A7-Dm

歌詞を音階に直すとつぎのようになり、コードとの対応が理解できる。

ラファファファミレラ ファミレミファソソ#ラ
ララララソファソソ ソファレミファソファミレ

多くのフォークソングはこの手法を用いている。すべてをマイナーコードにすれば暗く悲しい曲になるとは限らない。メジャーコードとマイナーコードのバランスにより曲は成り立ち、どちらのコードが多いかによって曲全体のイメージが出来上がる。モーツァルトの「交響曲第40番」はト短調の曲であるが途中で長調に転調する箇所がある。短調—長調—短調とすることによって短調の曲を引き立てている。

長調の曲は明るく短調の曲は暗い、とするには数々の反例がある。2008年8月、私はイギリスのケンブリッジに研究出張していた。夕食後のこと、北ベトナムから来ている大学院生がYouTubeで聴き覚えのある曲を聴いているので、パソコンの画面をみると「昔の名前で出ています」(作詞：星野哲郎、作曲：叶弦大)だった。“Hoa ann dao”という曲名となってベトナムで知られていて、桜の花が満開という意味らしい。本来、曲と歌詞は一体としてあるものだが、曲が独立して海外に広まった例であり、元歌は哀愁歌であるが、その人の感じ方によってまったく違う明るい曲にもなるということだ。

5. 5音階とヨナ抜き音階

これまで7音階を中心に論じてきたが、日本の5音階について触れておこう。日本音階のうち、とくに雅楽にみられるものは中国の12律によっていて、それが日本的に変容したものである。一方、日本の伝統音楽の音階は、4種のテトラコード「民謡」「律」「都節(みやこぶし)」「琉球」にもとづいていて、それぞれが民謡音階、律音階、都節音階、琉球音階となる。民謡音階と律音階は陽音階・陽旋法に対応し、都節音階は陰音階・陰旋法に対応する[3]。

- ・民謡音階：レファソ ラドレ
- ・律音階：レミソ ラシレ
- ・都節音階：レミソ ラシトレ
- ・琉球音階：レファ#ソ ラド#レ

このほかに明治時代以後に生れた音階で、四七(ヨナ)抜き音階という和洋折衷の音階がある。四七抜き音階とは、ドレミファソラシドの西洋音階のうち四番目(ヨ)と七番目(ナ)を抜いた音階で、長音階の場合は、四番目はファで七番目はシであるから、ドレミソラの5音階となる。短音階の場合は、ラシドレミファソの四番目はレで七番目はソであるから、ラシドミファの5音階となる[3]。日本の演歌や歌謡曲に多用され、「北国の春」や「昴」などがそれにあたる。

5音階はオクターブ内に5音をもつ音階で、その音程にはさまざまな組み合わせがある。日本や中国は5音階が中心だが、東南アジアから南・西アジアにもこの傾向がみられる。ジャワのガムランはスレンドロとペログの音階をもつが、これらは5音階である。また、インドの音楽も部分的には5音階である。アジアだけでなくアフリカやヨーロッパ(とくにハンガリーやスコットランド)など、5音階をもつ民族は広範囲にあるとみてよい[3]。

5音階の5(奇数)はヒトの指が5本であることから説明するのは容易である。一方、7音階はもとを正せば12律であった。つまり1オクターブを12個の半音にわけたのである。12(偶数)は割ったり掛けたりするのが容易であるので、きわめて合理的な数である。そして12の半音を5個の全音と2個の半音

の組み合わせで7音階ができたのである。7は奇数である。5音階と7音階、12律などには奇数と偶数の文化が融合しているようにも見える。

1960年代後半から1970年代にかけてはフォークソングの全盛期であった。その頃の音楽は短調の曲が多かったような記憶がする。そこで文献[5]をもとにベスト572曲のデータを表計算ソフトに入力して傾向を調べてみた。ひとつの曲の中でメジャーコードとマイナーコードの占める割合はやはりマイナーコードが多かった。長調より短調の曲が多く時代を反映していたのだろうか。

短調の曲が日本人に親しまれたのは1970年代以前にもある。第二次世界大戦後に流行ったロシア民謡(「うたごえ」として親しまれる)も短調が多い。戦前の唱歌にも多くみられるし、1970年以降のグループサウンズ、歌謡曲や演歌の中にも短調が多い。海外ではラテン音楽は短調が多く、アメリカ民謡は長調が多い。ところで、長調の曲と短調の曲とどちらが多いのであろうか。ウィキペディア(Wikipedia)で調べたところ、長調と短調の代表的な曲の数はほぼ同数であった。長調が好きか、短調が好きかはヒトの好みの問題であるように思える。同じ7音階でも、半音の位置を変えるだけで長調にも短調にもなるピタゴラス音律はよくできていると思った。

参考文献

- [1] 芥川也寸志『音楽の基礎』岩波新書E57, 1971
- [2] 小島英幸『音階入門』音楽之友社, 1996
- [3] 藤井知昭他『民族音楽概論』東京書籍, 1992
- [4] 奥平ともあき『誰にでもできる作曲講座』ドレミ楽譜出版社, 2008
- [5] 浅野純編『フォークソングのすべて新訂版ベスト572』全音楽譜出版社, 1997

(にしやま ゆたか/大阪経済大学)

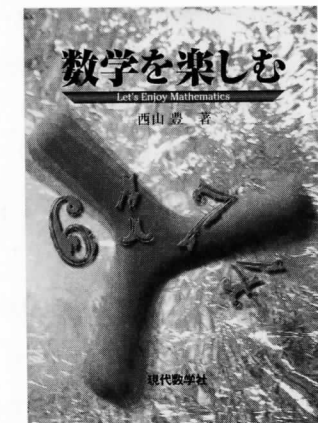
好評発売中

日常生活の中の数学と
文化を語る!

数学を楽しむ

西山 豊 著 A5判・272頁・定価2,100円

ISBN978-4-7687-0381-6



目次紹介

プーメランはなぜ戻ってくるか、花びらの数理、不動点の作図、階段のスイッチ、扇風機の数理、卵形の数理、バーコード・シンボル、積み木と調和級数、メビウスの帯で遊ぶ、たたみかえの数理、裏返す、ミウラ折り、セバタクローで遊ぶ、図形の消滅、6174の不思議、回分数と196、オルダム継手からエアコンまで、面積を測る、サイコロの目の和が同じ、意外性のある確率、乱数の仕組みを明かす、ルート2の計算、最速降下問題、円周率とマチンの公式、バーンサイドの補題、ガウスの正17角形作図法、Sudokuがイギリスで大ブレイク、奇数の文化と偶数の文化、曲線の文化と直線の文化、指で数える

現代数学社