数学を楽しむ

赤と黒のゲーム必勝法

西山　豊

1. 勝率 86 %のゲーム

百人一首の絵札（読み札）を使った「坊主めくり」という遊びは意外と面白い．坊主が出ると自分の札を全部出さねばならないが，姫が出ると出された札が全部もらえる．名称とルールは地方によって若干の違いはあるが，百人一首の意味がわからない幼い子供にも楽しむことができる．坊主めくりの面白さは，手持ちの札がダイナミックに移動することだろうか．めくった札が坊主か姫かの偶然性を応用した遊びである．

一方，トランプの色が何色かを当てるゲームがある．トランプは赤色が 26 枚（ハートとダイヤモンド），黒色が 26 枚（スペードとクラブ）の合計 52 枚であるが，カードをよくシャッフルして裏向けにして机の上に置き，赤色か黒色かを二人で当てるゲームを考える．確率で考えると，まったく当たらない場合（0 枚）と，全部当たる場合（52 枚）を両極端として，平均して 26 枚が当たる，つまり正規分布に従うことが予想される．

赤色か黒色かの当たる確率は 2 分の 1 で等確率だから，坊主めくりのような面白さがないように思えるが，推定の仕方にちょっと工夫をすれば，平均の 26 枚どころか 30 枚を当てることが可能である．こんな面白い確率の話題が掲載されているのは，約 20 年前に発表されたケニス・ルヴァスールとドン・ザギエの 2 つの論文である（[1],[2]）．K. ルヴァスールは，でたらめに予測すると 26 点のところが，ある方法では 30.007 点になることを数学的に証明し，D. ザギエは，この結果を踏まえて，でたらめに赤と黒を言う相手に対して，勝率が 86 %のゲームになると述べている．一体，どういう作戦なのか，つぎに説明していこう．

“赤か黒か”のゲームは図 1 に示すように，最初に n 枚の赤と n 枚の黒があるとき，格子点 (n, n) から始まり，格子点 $(0, 0)$ に到達するまでの下降する径路とみなすことができる．径路の途中の座標 (r, b) は，赤のカードが r 枚，黒のカードが b 枚であることを示している．次のカードが赤ならば座標が $(r-1, b)$ に，黒ならば $(r, b-1)$ に移動する．このような径路をゲーム径路（game path）と呼ぶことにする．

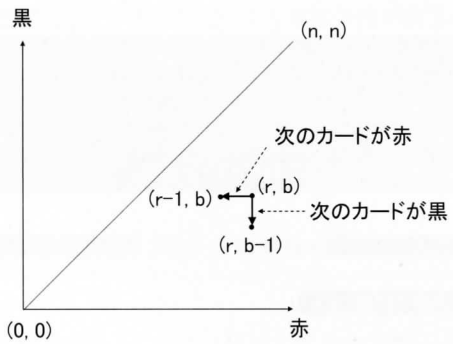


図 1．ゲーム径路（game path）

2. 対角線に出会うと 0.5 点増える

トランプの赤か黒か，コインの表か裏かのように 1 か 0 かの 2 つの状態をあつかう場合は，ランダム・ウォーク，または最初に考察した数学者の名前をとってベルヌーイ試行（James Bernoulli, 1713）と呼ばれることがある．コインの裏表は裏と表が無限につづくベルヌーイ試行であるが，トランプの場合は赤と黒が 26 枚ずつであるので有限で，条件付きのベルヌーイ試行と見ることができる．

さて，格子点 (n, n) から格子点 $(0, 0)$ までの，ゲーム径路は組合せを考えると，全部で ${}_{2n}C_n$ 通りの径路が考えられるが，これらの径路においてとくに対角線に出会うことが，今回の予測に大きな効果をもたらすことを示そう．つまり，対角線に出会うたびに予測が 0.5 点ずつ増加していくというのだ．

今，格子点 (n, n) から始めて，最初のカードが黒であるとしよう．図 1 では右下三角の領域であり，この最初のカードを知ることが 0.5 点の増加に貢献するのである．そして，ゲーム径路が，つぎの対角線上の点 $(n-k, n-k)$ に出会ったとしよう．このジグザグの径路において，最初の黒が出た直後から，「カードは赤である」と言い続けることにする．なぜならこの径路では，つぎの対角線 $(n-k, n-k)$ に到達するまで赤のカードは黒のカードより多いからだ．

赤のカード＞黒のカード

格子点 (n, n) から格子点 $(n-k, n-k)$ までの径路は $2k$ のカードを引くことになるが，1 枚目はすでに黒色であるから，残り $2k-1$ 枚は k 枚が赤で，$k-1$ 枚が黒である．そこで，$2k-1$ 枚に対して，「つぎは赤である」と言い続けるなら，k 回が正しく $k-1$ 回が間違っていることになる．最初のカードの予測は赤か黒かわからないので確率が 0.5 であるから，予想する得点は可能な $2k$ に対して $k+0.5$ ということになる．

一方，乱数だけをたよりに推測する戦略では，当たる確率は 2 分の 1 であるから，格子点 (n, n) から格子点 $(n-k, n-k)$ の間 $2k$ 枚のうち当たるのは k 枚である．$k+0.5$ と k では，その差が 0.5 である．このように対角線と出会えば出会うほど，この特別な 0.5 を予想の得点に加算することができるのだ．

たとえば，図 2 のようなゲーム径路では，格子点 $(26, 26)$ から格子点 $(0, 0)$ に向かうまでに対角線に出会う回数は（格子点 $(0, 0)$ を含むと）5 回であるので，1 回あたり 0.5 得点が加算されるので，平均得点 26 に加えると，得点の期待値は

$$26+0.5\times 5 = 28.5$$

となる．

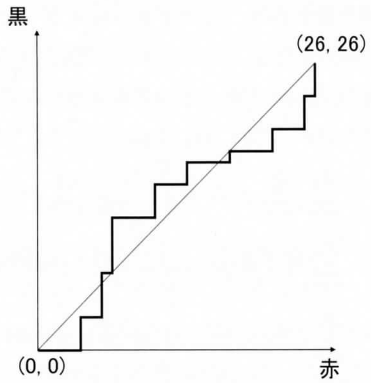


図 2．対角線に出会うたびに 0.5 点増える．

あるゲーム径路 p が対角線に出会う回数を $v(p)$ とする．最初の格子点 (n, n) も対角線に出会っているが，これを含めないので，$v(p)-1$ が実際に対角線に出会う回数となる．それぞれに対して 0.5 点ずつ加算されるから，$0.5(v(p)-1)$ 点が増加する得点である．何も作戦を練らない，乱数だけを頼りにする平均得点は n であるから，$n+0.5(v(p)-1)$ が予想得点となる．以上は径路 p についてだけの予想得点であるが，全径路 P について総和をとり，径路の総数 ${}_{2n}C_n$ で割ると，予想得点 $S(n)$ が次式のように計算できる．

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{p\in P} (n+0.5(v(p)-1))/C(2n,\ n) \\ &= n+0.5\Bigl(\Bigl(\sum_{p\in P} v(p)/C(2n,\ n)\Bigr)-1\Bigr) \qquad (1) \end{aligned}$$

この $S(n)$ がどのように計算されるかをつぎに見ていこう．

3. 対角線に出会う総回数 $V(n)$

ここでは，すべてのゲーム径路 $p\in P$ が対角線に出会う総回数 $V(n)$ を求めることから考えよう．

$\chi(p, m)$ という変数を考え，径路 p が対角線上の格子点 (m, m) に出会うとき 1，出会わないとき 0 の値をとるとする．対角線上の格子点は $(0, 0)$ から (n, n) までの n 個あり，これらが，すべてのゲーム径路 $p\in P$ に対して計算しなければならないから次式のようになる．また，総和の順序を変えることが可能で，その式は，対角線上の格子点 (m, m) に出

会う径路の数であり，これを0から n まで変化させたときの総和となる．

以上を数式にまとめるとつぎのようになる．ただし，組合せの式 $C(2m,\ m)$ は ${}_{2m}C_m$ のことである．

$$V(n)=\sum_{p\in P}\left[\sum_{m=0}^{n}\chi(p,\ m)\right]=\sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{p\in P}\chi(p,\ m)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\text{格子点}(m,\ m)\text{に出会う径路の総数}$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C(2m,\ m)C(2(n-m),\ n-m)$$

ここで，最後の式をあらためて書きなおすと次式となる．

$$V(n)=\sum_{m=0}^{n}C(2m,\ m)C(2(n-m),\ n-m) \qquad (2)$$

この式において，総和の各項は，組合せ $C(2m,\ m)$ と $C(2m,\ m)$ の“たたみこみ”になっていることに注意すること．

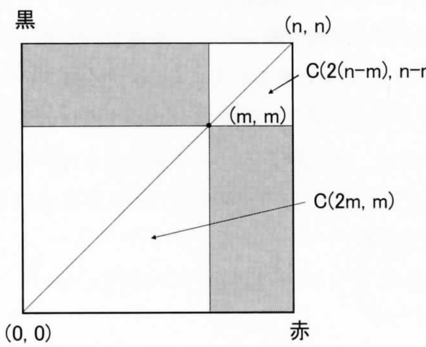


図3．$V(n)$ の求め方

4. 生成関数とたたみこみ

ゲーム径路が対角線に出会う総回数 $V(n)$ を計算するには前式(2)で十分であることは事実だ．最近のパソコンにある表計算ソフト（たとえば，マイクロソフト社の Excel では，COMBIN という関数）を使えば，たちどころにこの値を計算してくれる．しかし，驚くなかれ，K. ルヴァスールの論文では，前掲(2)式は，次式まで簡略化している．

$$V(n)=4^n \qquad (3)$$

これによると，$V(2)=16$，$V(3)=64$，$V(4)=256$ などとなる．読者は，実際にこの式があっていることを確かめること．

さて(2)式から(3)式を導入するためには一足飛びにはいかない．「テーラー展開」，「生成関数」，「たたみこみ」などの数学の知識が必要である．以下，順を追って説明していこう．

証明のキーになるのは，$1/\sqrt{1-4z}$ をテーラー展開することである．するとその値が，$\sum_{n=0}^{\infty}C(2n,\ n)z^n$ になるのである．

テーラー展開すべき関数を $f(z)$ とすると，

$$f(z)=1/\sqrt{1-4z}=(1-4z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(0)=1$$

であり，よく知られているテーラー展開の公式

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\cdots$$

に関数 $f(z)$ と，導関数 $f'(z)$，$f''(z)$，$f^{(3)}(z)$，… を求めて，それらに $z=0$ を代入すると，

$$f(z)=1+2z+6z^2+20z^3+70z^4+252z^5+\cdots$$

となる．この式の係数に注目すると，

$$f(z)=C(0,\ 0)z^0+C(2,\ 1)z^1+C(4,\ 2)z^2$$
$$+C(6,\ 3)z^3+C(8,\ 4)z^4+C(10,\ 5)z^5+\cdots$$

これで

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}}=\sum_{n=0}^{\infty}C(2n,\ n)z^n \qquad (4)$$

が証明されたことになる．

生成関数（generating function）の概念は，フィボナッチ数の一般項を求めるためにド・モアブルが用いたのは有名であり（1730年），確率の分野では母関数とも呼ばれている．

いま，数列 $A=\{a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^n\}$ があるとき，その生成関数 $G(A\,;z)$ は，

$$G(A\,;z)=a+arz+ar^2z^2+ar^3z^3+\cdots$$

と表され，これは初項が a で，公比が rz の無限等比数列であり，数列の和を求めると次式となる．

$$G(A\,;z)=\frac{a}{1-rz}$$

なる．

いま，数列 D があって，その生成関数が

$$G(D\,;z)=\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$$

で表わされるとするならば，数列 D^*D に対する生成関数は

$$G(D^*D\,;z)=\frac{1}{1-4z}$$

となる．この関係を使って証明していこう．ここで D^*D は「たたみこみ」と呼ばれるもので，この考え方が必要なので，それを補足しておこう．

2つの数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ から新しい数列 $\{c_k\}$ を導く演算は確率ではしばしば出てくる．

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$$

で定義された新しい数列 $\{c_k\}$ は $\{a_k\}$ と $\{b_k\}$ のたたみこみと呼ばれ，

$$\{c_k\}=\{a_k\}*\{b_k\}$$

と書く．数列の添字にとくに注意すること．対応する数列の項を前から順番にかけあわせるのではなく，いわゆる“たすきがけ”になっている．たたみこみは，重畳，結合などの用語で使われることもある．英語では convolution，ドイツ語では faltung，フランス語では composition である．

さて，生成関数に対しても「たたみこみ」があり，それはつぎのようになる．数列 $A=\{a_k\}$ に対する生成関数 $G(A\,;z)$，数列 $B=\{b_k\}$ に対する生成関数を $G(B\,;z)$ とするとき，

$$G(A\,;z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

$$G(B\,;z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n$$

であり，

$$G(A\,;z)\times G(B\,;z)$$
$$=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n)$$
$$\times(b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n)$$
$$=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots$$
$$+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n$$
$$+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_nb_1)z^{n+1}+\cdots$$
$$+a_nb_nz^{2n} \qquad \cdots+$$

となるから，生成関数の各項の係数をみると，これが数列 A と数列 B のたたみこみになっていることから，生成関数においてもたたみこみが成り立つことがわかる．

さて，式(4)より，数列 $D=\{{}_{2k}C_k\}=\{C(2k,\ k)\}$ とするとき D と D のたたみこみを D^*D とすると，

$$G(D^*D\,;z)=G(D\,;z)^2=\frac{1}{1-4z} \qquad (5)$$

となる．$D^*D=V$ としたとき，

$$V(n)=4^n$$

である．なぜなら，数列

$$V=\{4^0,\ 4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^n\}$$

に対する生成関数 $G(V\,;z)$ は，

$$G(V\,;z)=4^0+4^1z+4^2z^2+4^3z^3+\cdots$$

$$=\frac{4^0}{1-4z}=\frac{1}{1-4z}$$

となることからも確認できる．このようにして式(1)は

$$S(n)=n+0.5((4^n/C(2n,\ n))-1)$$

でおきかえられる．組合せの公式にスターリングの公式（この公式の証明については文献[3]などに詳しいので，興味がある読者は参照のこと）

$$n!=\sqrt{2\pi n}(n/e)^n+O(\sqrt{2\pi/n}(n/e)^n)$$

を適用すると，さらに整頓され最終的には予想得点は次のようになる．

$$S(n)=n+0.5(\sqrt{n\pi}-1)+O(1/\sqrt{n}) \qquad (6)$$

この式において，$n=26$ を代入するとトランプの場合であり，$S(26)=30.007$ となる．つまり，52枚のカードのうち約30枚を当てることができ，通常の26枚より4枚多く当てることができる．$n=100$ の場合は，$S(100)=108.290$ である．

また，図4に示すように，乱数だけをたよりにする得点分布と式(6)による得点分布を重ねてみた($n=26$)．分布は最低が26点で，中央値が30点あたりの分布となった．

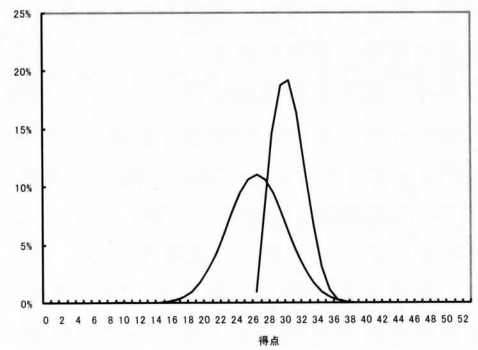


図4．でたらめ方式と戦略方式の得点分布

5. 実践に向けて

式(6)が最終の式となるが，式(2)からでもパソコンさえあれば，十分に $S(n)$ の値は計算できる．その場合は，カタラン数

$$C(n)=\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}={}_{2n}C_n-{}_{2n}C_{n-1}$$

と，重複組合せ

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

の考え方が必要となる．しかし，パソコンがこれほど普及しなかった時代にすでに，式の推論と展開だけで式(6)まで求めている数学者の頭脳に驚かされる．人間はコンピュータより偉いのだ！

理論上は図 2 に示すように対角線に出会うたびに得点が 0.5 点増加することでよいが，実際にトランプで試す場合は，つぎのように手順を簡単にしておくとよい．

(1) 1 枚目は，とりあえず黒色と宣言しておく．

(2) めくったカードが赤色なら，黒色のほうが多いということで「黒カード＝赤カード」になるまで，黒色と言い続ける．

(3) めくったカードが黒色なら，赤色のほうが多いということで，「赤カード＝黒カード」になるまで，赤色と言い続ける．

対角線を超えると得点が 1 点増える．図 5 では対角線を 2 回超えているので，得点は 28 点 (26+2＝28) となる．

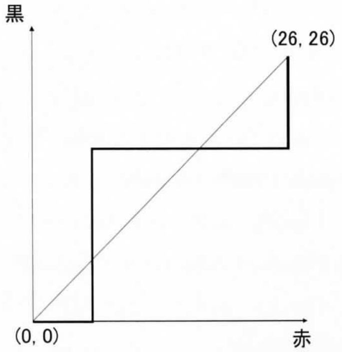


図 5．対角線を超えると 1 得点増える．

参考文献

[1] Kenneth M. Levasseur, How to Beat Your Kids at Their Own Game, Mathematics Magazine, Vol. 61, No. 5, December 1988, 301–305

[2] Don Zagier, How Often Should You Beat Your Kids? Mathematics Magazine, Vol. 63, No. 2, April 1990, 89–92

[3] W. フェラー，河田龍夫監訳『確率論とその応用 I 上』紀伊國屋書店，1960，72–76

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

～複素関数～

大竹真一

変数 x と関数の値 y がいずれも実数である実関数 $y=f(x)$ に対し，変数 z と関数の値 w がいずれも複素数の範囲で考えるときこの関数 $w=f(z)$ を複素関数という．今回はこの，複素関数について，その基本的な内容を学んでみよう．多くの諸君は「(複素) 関数論」でさらに体系的な話を学ぶ．ここでは，関数論にはあまり入らないでおき，複素関数とその微分積分の概観を目的とする．

前回，複素平面について

「実数が数直線上の点に対応されるように，複素数は平面上の点と対応させることができる．この平面を複素平面という．」

と学んだ．

(1) 複素関数

x 軸上の点 x から y 軸上の点 y への対応が実関数

$$y=f(x)$$

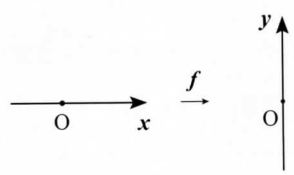
であるように，

複素数 z を表す複素平面(z 平面)上の点 $z=x+iy$ から

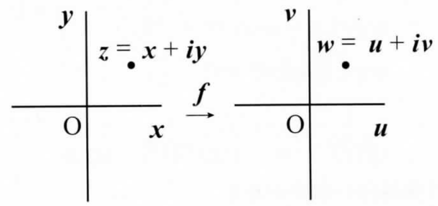
複素数 w を表す複素平面(w 平面)上の点 $w=u+iv$ への対応が複素関数

$$w=f(z)$$

である．



x 軸　　y 軸



z 平面　　w 平面

すなわち，実関数 $y=f(x)$ において，定義域を与える実数の集合が x 軸であり，値域を与える集合が y 軸であるように，複素関数 $w=f(z)$ において，定義域を与える複素数の集合が z 平面であり，値域を与える集合が w 平面である．

(2)多項式関数，有理関数

すでに見てきたように，複素数について四則演算は拡張され，したがって，実関数の多項式関数 $P(x)$ の変数 x を複素数 z に置き換えることにより，複素関数の多項式関数 $P(z)$ が得られる．

複素関数の有理関数は 2 つの多項式関数 $P(z)$，$Q(z)$ を用いて $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ と表されるので，これも多項式関数のときと同様に，変数 x を複素数 z に置き換えることにより，複素関数の有理関数を得ることができる．

例として，実関数 $y=\dfrac{1}{x}$ と複素関数 $w=\dfrac{1}{z}$ を比較しながら具体例で考えてみよう．

(問い①) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくとき，$f(1)$，$f(2)$，$f(a)$ ($a\neq 0$，a ：実数)を求めよ．

(解)　$f(1)=1$，$f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f(a)=\dfrac{1}{a}$

($a\neq 0$，a ：実数)（解終）

このように，実数 x に対して，実数 1 個が対応する．