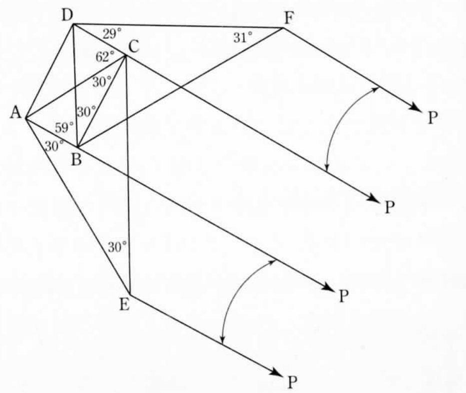
column

幾何大王からの挑戦状

遠いところにできる角度についての問題です．http://www.gensu.co.jp/saito/langley/ の公開付録 1 に示す 1 変数系列から，必要な角度の関係を 2 つ探してみて下さい．

角度の問題 #7

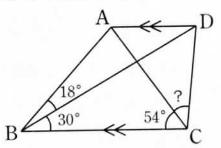
凸四角形 ABCD の頂点 B は $\triangle AEC$ の内側にあり，頂点 C は $\triangle BFD$ の内側にある．
$\angle ABD = 59^\circ$, $\angle DBC = \angle BCA = 30^\circ$, $\angle ACD = 62^\circ$, $\angle BAE = \angle AEC = 30^\circ$, $\angle BFD = 31^\circ$, $\angle FDC = 29^\circ$ のとき，直線 AB と直線 DC の交点を P とすると，$\angle EPA = \angle DPF$ となることを初等幾何で証明してください．



解答を 編集部宛郵送，FAX（編集部 075-751-0727）またはメール（kikadaiou@gensu.co.jp）でお寄せ下さい．名前または筆名を明記の上，11 月 11 日（木）までにお送り下さい．解答は 12 月号，正解者の発表は 2011 年 1 月号で行います．

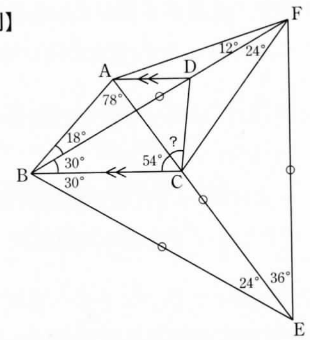
10 月号（#6）の答え

角度の問題 #6 AD // BC の台形 ABCD において，$\angle ABD = 18^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle BCA = 54^\circ$ のとき，$\angle ACD$ を求め，その角度となることを初等幾何で証明してください．



【答え】 $\angle ACD = 42^\circ$

【証明例】



$\angle CAB = 78^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$, $\angle DAC = 54^\circ$
直線 AC 上に，$\angle ABE = \angle CAB$ となるような点 E をとると，$EA = EB$, $\angle BEA = 24^\circ$,
$\angle DBE = 60^\circ$, $\angle CBE = 30^\circ$
半直線 BD 上に，$\angle BEF = 60^\circ$ となるような点 F をとると，$\triangle BEF$ は正三角形となり，
$\angle FBC = \angle CBE = 30^\circ$ なので，
E と F は直線 BC に対して対称の位置にあり，
$\angle CFB = \angle BEC = 24^\circ$.
また，$\angle AEF = 36^\circ$, $EA = EB = EF$ より，
$\angle EFA = \angle FAE = 72^\circ$
$\angle BFA = 72^\circ - 60^\circ = 12^\circ$
$\angle BFA < \angle BDA$ より，3 点 B, D, F は直線 BD 上でこの順に並んでいる．
$\angle FAD = 18^\circ = \angle ABF$ より，$\triangle FAD \backsim \triangle FBA$
$\therefore\ FD:FA = FA:FB$
$\angle CFA = 36^\circ$, $\angle ACF = 72^\circ = \angle FAC$ より，
$FC = FA$
$\therefore\ FD:FC = FC:FB$, $\triangle FCD \backsim \triangle FBC$
$\therefore\ \angle DCF = \angle FBC = 30^\circ$
$\angle ACD = 72^\circ - 30^\circ = 42^\circ$

9 月号（#5）正解者

木戸晶一郎 様 （初等幾何以外：黒川瞬 様）

9 月号（#5）講評

△ABC の外心が BD 上にあることに気づくのが最初のポイントでした．#7 のヒントで示した HP の系列では，1–10 の $x = 54$ に今回の四角形が出現します．

木戸さんの解答は，前号の証明例で言うと GB と GD を 2 辺とする正五角形を利用したものでした．初等幾何以外では，直線 BC と A, D との距離が等しいことを三角比の計算で示した解答もありました．

(http://www.gensu.co.jp/saito/kikadaiou/)

西山　豊

数学を楽しむ

単位分数の和が 1

1. 完全数をヒントに

分子が 1 の分数を単位分数という．1 を異なる単位分数に分解することができる．たとえば，次式はよく見かける．

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

左辺と右辺に 6 をかけると

$$6 = 3 + 2 + 1$$

となり，この等式が正しいことがわかる．

ここで，1 を異なる単位分数に分解する問題を考えてみよう．ただし，分母が 2 桁以下（99 以下の自然数）という条件をつけてみる．その場合，最大何個の単位分数に分解することができるだろうか．こんな問題を考えたのは，1992 年の頃だった [1]．

自然数 m に対して m を除くすべての約数（1 を含む）を求め，それらの総和が元の数 m に等しいとき，m は完全数であるという．つまり，6 は完全数である．6 と同じように 28 も完全数であり，28 の約数は 14, 7, 4, 2, 1 であるから，

$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$

両辺を 28 で割ると，

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$$

となり，1 が 5 個の単位分数に分解できたことになる．

完全数は 6 や 28 以外にも 496, 8128, 33550336, 8589869056 等があり，同じような方法で，1 を異なる単位分数に分解することができるが，分母が 99 以下である条件では，項数を増やすことが期待できない．496 の場合は，9 個で分母が最大 3 桁になる．

$$496 = 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

分母が 99 以下では，試行錯誤の末，最大 42 個の異なる単位分数に分解することができた．また，分解の仕方によっては異なる解が存在することもわかった．しかし，42 個が最大であることの証明はできていない．もしかして 43 個が見つかるかもしれない．

今回は，どのような手順で 42 個の単位分数に分解できたかを説明したい．この問題は，自分で解く楽しさがあるので，読者はこの先を読まずに，一旦解いてみて，後で答えあわせをするとよいだろう．

2. 二項分解と二項合成

まず，

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

の 3 個から始めてみよう．分数の表記は行数を取るので，$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ などの単位分数は，分子の 1 を省略して /2, /3, /6 などと表記することにすると，次のような記述となる．

$$1 = /2 + /3 + /6 \qquad ①$$

そして，先頭の /2 の項を分解していくと，つぎの 9 個まで分解できることになる．

$1 = /2 + /3 + /6$
$= (/3 + /6) + /3 + /6$
$= (4/15 + /15) + (/6) + /3 + /6$
$= (4/15) + (/30 + /30) + (/6) + /3 + /6$
$= (/5 + /15) + /30 + (/45 + /90) + (/9 + /18) + /3 + /6$
$= /3 + /5 + /6 + /9 + /15 + /18 + /30 + /45 + /90 \qquad ②$

ここで，

$$/3 = /4 + /12$$
$$/6 = /7 + /42$$

であるから，/3 と /6 を置き換えるとつぎの 11 個になる．

$1 = /4 + /5 + /7 + /9 + /12 + /15 + /18 + /30$

$+/42+/45+/90$ ③

分解や合成の仕方を整理すると5つの法則に分類することができる．

法則1：二項分解

単位分数 $/n$ が2つの異なる単位分数に分解できることを示しておこう．単位分数の分母 n が $n=a\times b$ と分解できたとする．ただし，a, b は1を含んでもよいこととする．すると，つぎの2つの単位分数に分解できる．

$$/n=/(a\times b)=(a+b)/((a\times b)\times(a+b))$$
$$=/(b\times(a+b))+/(a\times(a+b))$$
$$=/(a\times(a+b))+/(b\times(a+b))$$

たとえば，単位分数 $/30$ は $n=30$ であり，$30=5\times6$ と分解できるから，

$n=30,\ a=5,\ b=6,$

$a+b=11,$

$a\times(a+b)=55,\ b\times(a+b)=66$

$/30=/55+/66$

となる．このような二項分解は，いくつでも作ることができる．前述の $/3$, $/6$ はつぎのようになる．

$$/3=/(1\times3)=/(1\times(1+3))+/(3\times(1+3))$$
$$=/4+/12$$
$$/6=/(1\times6)=/(1\times(1+6))+/(6\times(1+6))$$
$$=/7+/42$$

このような二項分解はひとつずつ手計算で求めてもよいし，表計算ソフトを使ってすべてをリストアップしてもよい．

③式において，$/42$, $/7$ はつぎのようになる．

$$/42=/(6\times7)=/(6\times(6+7))+/(7\times(6+7))$$
$$=/78+/91$$
$$/7=/(1\times7)=/(1\times(1+7))+/(7\times(1+7))$$
$$=/8+/56$$

以下，法則1を用いた二項分解はつぎのとおりである．

$/8=/9+/72$

$/10=/14+/35$

$/18=/22+/99$

$/24=/33+/88$

$/28=/44+/77$

$/30=/55+/66$

法則2：分母を n 倍して n 項分解

単位分数 $/a$ の分母 a を n 倍して，分母が $n\times a$ の単位分数 n 項に分解する．

$$/a=/(n\times a)+/(n\times a)+\cdots+/(n\times a)$$

$n=2$ または $n=3$ の場合は，つぎのようになる．

$/4=/8+/8$

$/5=/10+/10$

$/8=/24+/24+/24$

$/9=/18+/18$

$/14=/28+/28$

$/15=/30+/30$

$/18=/36+/36$

$/35=/70+/70$

法則3：三項分解

$$/n=/a+/b+/c$$

であるが，これを見つけるのは一番難しい．計算方法は後述する．

$/9=/14+/35+/90$

$/10=/17+/34+/85$

$/12=/26+/39+/52$

$/20=/38+/76+/95$

法則4：二項分解の変形

基本の二項分解 $/a=/b+/c$ があるとき，それぞれの単位分数の分母を n 倍したものも二項分解となる．

$$/a=/b+/c$$
$$/(n\times a)=/(n\times b)+/(n\times c)$$

たとえば

$/4=/5+/20$

$/(2\times4)=/(2\times5)+/(2\times20)$

$/8=/10+/40$

である．このような分解にはつぎがある．

$/10=/12+/60$

$/12=/16+/48$

$/14=/21+/42$

$/15=/18+/90$

$/16=/20+/80$

$/18=/27+/54$

$/24=/32+/96$

$/30=/50+/75$

$/36=/63+/84$

法則5：二項分解を逆に適用すれば二項合成

たとえば

$/15=/18+/90$

の二項分解があるとき，左右の両辺を入れ替えると二項合成になる．

$/18+/90=/15$

このような二項合成は，つぎのようなものがある．

$/28+/70=/20$

$/72+/24=/18$

3. 三項分解の方法

前掲の法則3では，つぎのような分解が可能であることを示した．

$/12=/26+/39+/52$

ここでは，単位分数 $1/m$ を三項に分解することを考えてみよう．それには，分母の m が最小公倍数となるような3つの数 a, b, c を見つけることがキーポイントになる．そして，元の単位分数 $1/m$ の分子と分母に3つの数の合計 $a+b+c$ を掛ける．

$$1/m=(a+b+c)/(m\times(a+b+c))$$
$$=a/(m\times(a+b+c))+b/(m\times(a+b+c))$$
$$+c/(m\times(a+b+c))$$

ここで，a, b, c の最小公倍数が m であるから，m は a, b, c でそれぞれ割り切れる．つまり，a/m, b/m, c/m は単位分数になる．これらの分母に $(a+b+c)$ を掛けたものも単位分数となる．

1/12 を例にして三項分解を具体的に求めて見よう．最小公倍数が12となるような3つの数に 3, 4, 6 がある．3つの数の合計は $3+4+6=13$ である．単位分数 1/12 の分子と分母に $(3+4+6)$ を掛ける．

$$1/12=(3+4+6)/(12\times(3+4+6))$$
$$=3/(12\times13)+4/(12\times13)+6/(12\times13)$$
$$=1/(4\times13)+1/(3\times13)+1/(2\times13)$$
$$=1/52+1/39+1/26$$
$$=1/26+1/39+1/52$$

一方，最小公倍数が12となる3つの数には，2, 4, 6 の組み合わせもある．この場合の3つの数の合計は $2+4+6=12$ となり，前述と同様の計算をすると

$$1/12=(2+4+6)/(12\times(2+4+6))$$
$$=2/(12\times12)+4/(12\times12)+6/(12\times12)$$
$$=1/(6\times12)+1/(3\times12)+1/(2\times12)$$
$$=1/72+1/36+1/24$$
$$=1/24+1/36+1/72$$

となる．

4. 最大項数は62

1を単位分数に分割する問題も，二項分解，二項合成，三項分解を繰り返す中で，いくつも項数を増やすことができて，暇つぶしにはもってこいだ．ところで，項の数は最大いくつまで増やすことができるのだろうか．積分で予測を立ててみると最大項数は62となった．それは以下のような手順で求まる．単位分数の総和を双曲線 $y=1/x$ の積分と比較してみる．積分区間を $[1, n]$ とすると，x の区間幅は $n-1$ となり，区分求積法でいう長方形の数は $n-1$ 個に対応し，つぎの不等式が成り立つ．

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\int_1^n\frac{dx}{x}<\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

この不等式を図で示すと図1と図2になる．

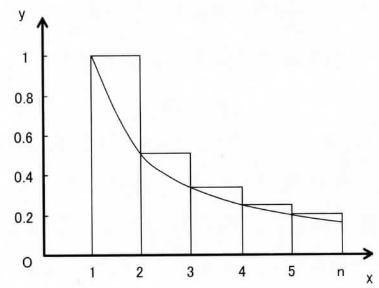


図1. $\int_1^n\frac{dx}{x}<\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$

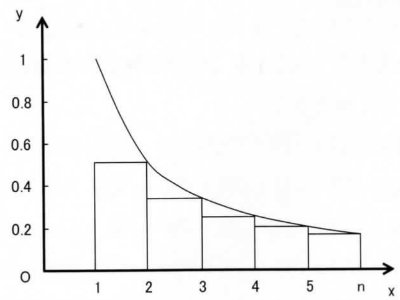


図2. $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\int_1^n\frac{dx}{x}$

前の不等式を変形すると

$$\int_1^n \frac{dx}{x}+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\int_1^n \frac{dx}{x}+1$$

になり，双曲線 $y=1/x$ の積分は $\log x$ であるから

$$\log n+\frac{1}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}<\log n+1$$

となる．

単位分数の分母が大きいほど項数を増やせるから，分母が 99 から始めて小さいほうに進むようにして，つまり $\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}$ を考えて，この値が 1 を越えない場合の最大の n を求めてみる．最初の不等式において積分区間 $[1,\ n]$ を $[n,\ 99]$ に変更すると

$$\sum_{i=n+1}^{99}\frac{1}{i}<\int_n^{99}\frac{dx}{x}<\sum_{i=n}^{98}\frac{1}{i}$$

になり，この不等式を変形すると

$$\int_n^{99}\frac{dx}{x}+\frac{1}{99}<\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}<\int_n^{99}\frac{dx}{x}+\frac{1}{n}$$

となり，定積分を求めると

$$\log 99-\log n+\frac{1}{99}<\sum_{i=n}^{99}\frac{1}{i}<\log 99-\log n+\frac{1}{n}$$

となる．ここで，単位分数の総和が 1 を超えないためには右側の不等式より，

$$\log 99-\log n+\frac{1}{n}<1$$

となる．この不等式で最大の n を求めると

$$n=38$$

となる．1/38 から 1/99 までの単位分数の総和であるから，項の数は $99-38+1=62$ となる．62 が最大項数であるが，現在わかっている項数 42 は，$42<62$ であるから，ほぼ妥当な数値である．

5. 樹形図

このようにして，1 を 42 個の異なる単位分数に分解することができた．

1＝/15＋/17＋/20＋/21＋/22＋/26＋/27＋/30
＋/32＋/33＋/34＋/35＋/36＋/38＋/39＋/40
＋/42＋/44＋/45＋/48＋/50＋/52＋/54＋/55
＋/56＋/60＋/63＋/66＋/70＋/75＋/76＋/77
＋/78＋/80＋/84＋/85＋/88＋/90＋/91＋/95
＋/96＋/99 ④

また，この解で

/15＋/30＋/90＝/18＋/24＋/72

のように置き換えると，別の解となる．

1＝/17＋/18＋/20＋/21＋/22＋/24＋/26＋/27
＋/32＋/33＋/34＋/35＋/36＋/38＋/39＋/40
＋/42＋/44＋/45＋/48＋/50＋/52＋/54＋/55
＋/56＋/60＋/63＋/66＋/70＋/72＋/75＋/76
＋/77＋/78＋/80＋/84＋/85＋/88＋/91＋/95
＋/96＋/99 ④'

以上の結果④を樹形図として表すと図 3 のようになる．1 を分解していくのであるから 1 が幹であり，幹から枝分かれしていく過程は二項分解，三項分解などに対応している．42 枚の葉っぱが 42 個の異なる単位分数になっている．このようにしてできあがった樹形図は個人的には気に入っているが，点線で示した，二項合成が 3 箇所ある．

/90＋/18＝/15

/72＋/24＝/18

/28＋/70＝/20

これらは生物学的に見て少し不自然である．分解過程を工夫すれば，このような二項合成を含まない分解方法があるかもしれない．

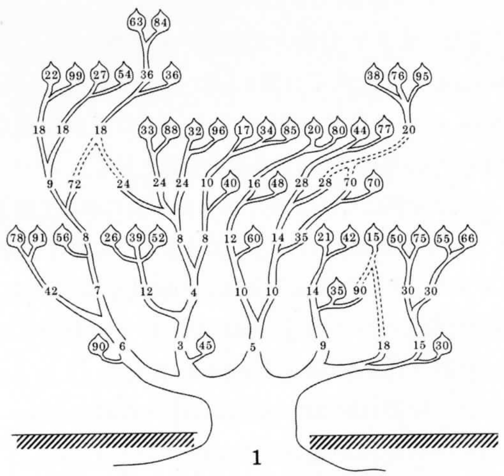


図 3．単位分数による分割の樹形図

参考文献

[1] 西山豊「エレガントな解答をもとむ」『数学セミナー』1992 年 8 月(出題)，11 月(解答)

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

～線積分とグリーンの定理～

大竹真一

今回は，線積分とこれに関わるグリーンの定理について考えてみよう．線積分は聞いたことあるけど実感がないよ，という学生諸君も少なくない．定積分，2 重積分などが面積や体積という応用？を通してゆっくりと実感されるのと違い，線積分は定義を学べばすぐにさらに先に進んでいくからかなとも思われる．グリーンの定理により重積分に変形すると，計算が楽になる分だけ，線積分がどういう計算をしていたのか捉えにくくなるということもあろう．とりわけ初学者は，線積分の計算をそのまま実際にやりながら，まずは線積分を実感していただきたい．

[1] 線積分 line integral

線積分は次のように定義される．

(定義)

平面上のある領域において，関数 $f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$ が連続で，またその領域内で区分的に滑らかな曲線(区分的に C^1 級の曲線)

$$C: x=x(t),\ y=y(t)\quad (a\leqq t\leqq b)$$

が与えられているとき，

$$\int_C f(x,\ y)dx=\int_a^b f(x(t),\ y(t))\frac{dx}{dt}dt$$

あるいは

$$\int_C g(x,\ y)dy=\int_a^b g(x(t),\ y(t))\frac{dy}{dt}dt$$

の形の積分を，曲線 C に沿う(曲線 C の上の)線積分という．

(注) $\int_C f(x,\ y)dx+\int_C g(x,\ y)dy$

$$=\int_a^b\left(f(x(t),\ y(t))\frac{dx}{dt}+g(x(t),\ y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt$$

の形で用いられることも多く，これを

$$\int_C f(x,\ y)dx+g(x,\ y)dy$$

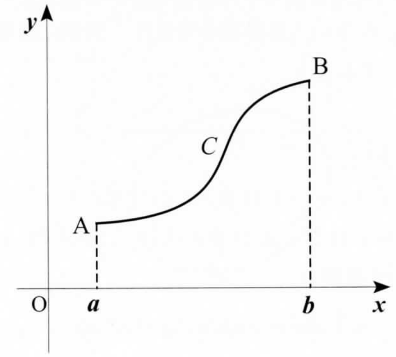
のように書く．

C には，パラメーター t の値により，$t=a$ から $t=b$ までのように，向きがつけられていると考え，その向きに沿って積分を考えるのである(もちろん，向きが与えられれば C は x，y の式で与えられることも多い)．最も単純な例からはじめよう．

図のように，A から B に向けて曲線 $C: y=\varphi(x)$ に沿った線積分

$$\int_C f(x,\ y)dx$$

を考える．



ただし，A，B の x 座標をそれぞれ，a，b とする．このとき $f(x,\ y)$ はつねに $y=\varphi(x)$ を満たすので $f(x,\ y)=f(x,\ \varphi(x))$ と表され，C に沿って a から b まで x について積分する．つまり，

$$\int_C f(x,\ y)dx=\int_a^b f(x,\ \varphi(x))dx$$

となり，線積分は普通の意味での定積分となった．

さらに，図のような曲線 $C: AP_1P_2B$ に沿った線