$\angle BGE = \angle GEB = \dfrac{540^\circ}{7}$,

$\angle GEF = \angle GEB - \angle FEB = \dfrac{360^\circ}{7}$.

$\angle EFG = \dfrac{360^\circ}{7} = \angle GEF$ より, $GE = GF$ で, 対称性より直線 DG は $\angle EDF$ および $\angle FGE$ の二等分線.

$\therefore\ \angle EDG = 30^\circ$, $\angle DGE = \dfrac{270^\circ}{7}$.

$\angle GDC = \angle EDC - 30^\circ = \dfrac{270^\circ}{7} = \angle DGE$ より, $EG \mathbin{/\!/} DC$.

さらに, $\angle CEB = \angle CAB + \angle ABE = \dfrac{270^\circ}{7}$,

$\angle GEC = \angle GEB - \angle CEB = \dfrac{270^\circ}{7} = \angle DGE$ より,

四角形 EDCG は $EG \mathbin{/\!/} DC$, $ED = GC$ の等脚台形となり, 2点 D, C は, 線分 EG の垂直二等分線を軸として互いに対称の位置にある.

$BE = BG$ より, 点 B は線分 EG の垂直二等分線上にあるので, $BD = BC$.

$\angle CDB = \angle EDB - \angle EDC = \dfrac{330^\circ}{7}$,

$\angle ABC = \angle DBC = 180^\circ - 2\angle CDB = \dfrac{600^\circ}{7}$,

$\angle BCA = 180^\circ - \angle CAB - \angle ABC = \dfrac{600^\circ}{7} = \angle ABC$

$\therefore\ AB = AC$

6月号 (#14) 正解者 クスコ 様, るーつる 様, 寺尾ひとみ 様, 高村 薫 様, 佐藤将範 様, 森原則男 様, 日塔祐治 様, ごんごんま 様, 山本衣里奈 様
(三角関数による解答：黒川 瞬 様)

6月号 (#14)講評

今回は, 出題者自身が前回の問題の証明に引きずられてしまった部分があり, クスコさんにもご指摘頂いたように「失投」気味の問題だったかもしれません. 実は, 点 D に集まる足して平角になる 3 つの角と, △ABC の内角の和を考えることで, $\angle EAD = \angle EDA$ となることに気づけば, $DE = AE = DB$ より, 何も補助線を引かずとも $\angle BCD = \angle ECD$ が示せました. 正解者のみなさんの中にも, それを用いて証明された方も多数おられた一方, 出題者同様難しく考えすぎた方もおられたようです.

なお, いろんな所に同じ角度や同じ長さが出現することを簡単に示せるような問題では, 自分で書いた図に示された角度の関係が与えられた条件からどういう順番で導かれるのかということが逆に把握しにくくなり, 論理の飛躍や循環論法の罠に陥りがちです. また, 自分では正しく証明されていると思っていても, あまりにも言葉足らずだと, その時点ではまだ示せない条件を用いていると見なされ, 読む者にロジックの流れを読み取ってもらえなくなります. 例えば「四角形 ADFE が平行四辺形となるように点 F を BC 上に取る」というところから出発している解答がありましたが, 本来平行四辺形になるような F が BC 上にあることは別途証明が必要な事柄であり, AB = AC と AD = CE を用いてきちんと説明しなければなりません.

お知らせ

「幾何大王からの挑戦状」の過去問を紹介する HP を作りました. 本誌に講評を掲載するタイミングで, 問題と解答を随時掲載していく予定です.
URL はこちら
http://www.gensu.co.jp/saito/challenge/

6174の不思議

西山 豊

数字の 6174 はちょっとした面白い数である. 数学が苦手な人でも, 数学が嫌いな人でも, 数学に対するイメージが変わるかもしれない. そのためには 4 桁の数の引き算が必要であるが, これは小学校の義務教育で学んでいるはずだから, ほぼ全員がこの話しに参加できることになる.

4 桁の数字をひとつ決める. ただし, 4 桁とも同じ数字, たとえば 1111 とか 2222 は除外する. 説明のために, 今年の 2011 年から 4 桁の数字を 2011 としよう. さてこの数字を構成する 4 桁をバラバラにして, 大きい順に並べると 2110 になる. 同様にして小さい順に並べると 0112 になる. 0 も数とみなしてこのように表示することにする. そこで, 大きい順に並べてできた数 2110 から小さい順に並べてできた数 0112 を引く.

$$2110 - 0112 = 1998$$

このような操作を発見者, D.R. カプレカー (1905-1986) の名前をとってカプレカー操作という. 引き算によってできた新しい数 1998 に対しても, 同じような操作, 大きい順に並べかえた数から小さい順に並べかえた数を引くことを繰り返す.

$$9981 - 1899 = 8082$$
$$8820 - 0288 = 8532$$
$$8532 - 2358 = 6174$$
$$7641 - 1467 = 6174$$

するとどうだろう. 4 回目の引き算で 6174 に到達するとともに, 5 回目以降の引き算では, 何回繰り返しても 6174 になる. 面白いことは, すべての 4 桁の数はカプレカー操作で 6174 に到達することである. 読者は, 他の数で試してみること. 6174 に到達する回数は最大 7 回であることがわかっている. だから, 少々計算間違いをしても 6174 に到達するのだ. 4 桁の引き算に自信がない読者は電卓を使おう.

なぜこのような不思議な現象が起こるのであろうか？ 証明方法のひとつとして, 4 桁の数を 30 個の数に絞り込み, その 30 個の系統図を図示すると 6174 に到達しているとするものがあるが, なぜという問いには明快に答えていない.

4 桁以外の数はどうなるのだろうかと興味がわくことだろう. 3 桁の数は 495 に到達することがわかっている. 2 桁の数は到達する数がなく, つぎのループに入って循環する.

$$9 \to 81 \to 63 \to 27 \to 45$$

5 桁の数は, 3 つのループのどれかに入る.

4 桁の 6174 や 3 桁の 495 のように, 同じ数字で循環する数は, 6 桁の場合は 549945 と 631764, 8 桁の場合は 63317664 と 97508421 があるが, すべての 6 桁の数, すべての 8 桁の数が, それらに到達するわけでもない.

すべての 4 桁の数が 6174 に到達する背景には何か数学の定理が潜んでいるのではと期待したいところだが, これは単なる偶然とも言われている. 詳しくは「6174 の不思議」『理系への数学』2006 年 1 月号 (『数学を楽しむ』に所収) を参照のこと. この記事はケンブリッジのオンラインマガジン PLUS 第 38 号に英訳されて世界中の人に親しまれている.

Mysterious Number 6174,
http://plus.maths.org/content/os/issue38/features/nishiyama/index

この記事を読んだイタリアの読者は, 洒落たコメントを寄せてくれた. 「すべての道はローマに通ず, すべての数は 6174 に通ず.」

(にしやまゆたか／大阪経済大学)