Mathématiques colonne 3

ヘキサフレクサゴンの 19 面折り

西山　豊

ヘキサフレクサゴンという数学パズルがある．ヘキサは6で，フレクサゴンは折りたたみ可能なものという意味であるから，「折り紙六角形」などと訳されている．パズルは紙でできていて正六角形の形をしている．六角形には表と裏があるので，2つの面しかないと思われるが，このパズルにはもうひとつの面が隠れているのである．

六角形の各頂点から中心に向かって線を引くと6個の正三角形ができる．となりあう三角形を2つずつつまみ三菱のような形にすると，六角形の中心から新しい面が出てくる．表でも裏でもない，第三番目の面である．どうなっているのだろうか．

ここで，3つの面が出てくるヘキサフレクサゴンの作成方法を説明しておこう．B4 サイズのコピー用紙を用意し，横向きに置く．1辺が6センチの正三角形を右端に描く．その左となりに上下逆にした正三角形を辺が重なるように描く．三角形，逆三角形，三角形，逆三角形の順に右から左へ合計 10 個並べ，1 から 10 まで数字を書いておく．最近の算数や数学の授業では図形を描くのにコンパスをほとんど使わないらしい．正三角形の底辺と高さの比は 2 対 $\sqrt{3}$ であるから，パソコンの図形描画機能を使って二等辺三角形を選び，幅を 60 ミリ，高さを 51.96 ミリとするとかなり正確な正三角形が描ける．

できた型紙をハサミで切り取り，3 番目と 4 番目の間を谷折りする．このとき紙は裏返る．つぎに 6 番目と 7 番目の間を谷折りし，先端を 1 番目の下をくぐらせる．9 番目と 10 番目の間を谷折りし，1 番目と 10 番目をノリづけするとパズルは完成する．谷折りを知らない人のために，英語では山折りを bend down，谷折りを bend up と表現することがある．bend up つまり手前に折ることが谷折りのことである．

パズルは短冊を 3 回，谷折りすることでできている．1 回の谷折りは短冊を 180 度ひねったことになるので，3 回の谷折りは 180×3 = 540 度ひねったことになる．トポロジーで話題になるメビウスの帯は 180 度ひねってノリづけしたもので，裏と表の区別のない平面として有名である．180 度の奇数倍ひねりは裏表のない平面となるので，ヘキサフレクサゴンも裏表の区別がない．裏表のないひとつの平面を 3 つにわけて 3 面が見えるようにしている．

3 つの面が循環して出てくる折り方を 3 面折りと呼ぶならば，4 面折りや 5 面折りはどうかと興味が移っていく．3 面折り，6 面折り，12 面折りなど 3×2^n 面折りの系列は比較的簡単で無限面折りが可能である．実際のパズルでは 24 面折りが限界のようである．また，この系列に属さない 4 面折り，5 面折り，7 面折りなどをどうするかの方が意外と難しい．

私は 1985 年頃にこのパズルを知ってから，25 年以上も興味を持ち続け，ついに 19 面折りを完成した．おそらくこの 19 面折りを持っている人は国内では 5 人はいないと思う．「ヘキサフレクサゴンの一般解」『大阪経大論集』Vol.54，No.4，2003，

http://www.osaka−ue.ac.jp/gakkai/pdf/ronshu/2003/5404_ronko_nisiyama.pdf

政治には裏と表がある．ウソとホント，本音と建前があって世の中はうまく機能しているが，数学者はその使い分けが苦手だ．裏表の区別のないメビウスの帯に興味を持つように，現実生活でも裏と表の区別をつけないので誤解されやすい．

（にしやま　ゆたか／大阪経済大学）

線型代数のはなし
——応用をめざして
第 10 回

□□□□ 非線型のはなし

□□□□ 松谷茂樹

今回は線型に対峙するものとして非線型について話をします．非線型というと線型よりやや高級であるという風潮がどこかにあるようですが，その風潮に対して，筆者はやや懐疑的です．非線型系を理解することは線型系をよく知ることであると思っているからです．

他方，何かと言えば線型である『フーリエ変換のみ』というのもどうかとも感じています．万物に魂があるという事を信じるわけではありませんが，数学や物理的対象の囁きにもう少し耳をそばだてるような手法もあるのではないかと考えています．

その耳をそばだてるという精神をオイラー（1707–1783），リーマン（1826–1866），ポアンカレ（1854–1912）の研究に感じます．非線型とも関わる研究の一部をおおらかな立場[1]で紹介します．

10.1 シュワルツ微分と SL(2, ℂ)

まずはポアンカレからです．

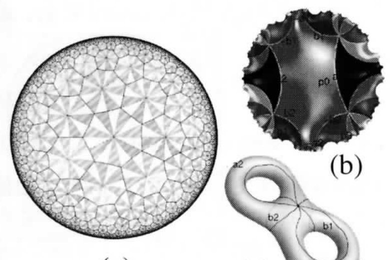

図 10-1: (a) [1], (b) と (c) [2]

図 10-1(a) は $H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で，微小長さ $\dfrac{|dz|}{1-|z|^2}$ を持つポアンカレ円盤と呼ばれるものです．ポアンカレは H への離散群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の作用と，作用に不変な領域の関数と幾何とを研究しました．

特殊な Γ を選ぶ事で図 10-2(b) のように Γ による折り返しパターンを描けます．Γ に不変な領域は図 10-2(c) に示すような，2 つ以上の穴の空いたドーナツである閉リーマン面と見なせたりします．近傍にある 2 点を，自然な軌道（測地線）に沿って動かすとどんどん分離してゆくという**カオス**の特徴を持ちます．

この話のほんの触りとして SL(2, ℂ) の $\mathbb{C}P^1$ への作用とそれに不変な関数の話をしましょう．

10.1.1　1 次元複素射影空間

前回の射影空間の応用です．図 10-2(a) のような 1 次元複素射影空間を考えます．つまり，$(\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{C}^{2\times} := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対して[2] その比 $[\psi_1 : \psi_2]$ を $\mathbb{C}P^1$ の元とします．後々のために "ψ" を $\mathbb{C}^2$ の座標としています．前回に示しましたが，$\mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と考え，$\psi_2 = 0$ の場合も含め，形式的に $\gamma = \psi_1/\psi_2$ と書きます[3]．この対応を $\pi : \mathbb{C}^{2\times} \to \mathbb{C}P^1 ((\psi_1, \psi_2) \longmapsto \gamma = \psi_1/\psi_2)$ と記します．

このとき，複素特殊線型変換群 SL(2, ℂ) の元 m

$$m \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} ad - bc = 1 \\ a, b, c, d \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{C}^2$ の元に作用し，π により**射影変換（メビウス変**

[1] ここで言うおおらかとは発散とか収束とはあまり厳密に考えず，形式的に計算をする事です．ここの内容は頑張れば数学的に正当化されます．

[2] 集合 A と B に対して $A \setminus B$ は，$\{a \in A \mid a \notin B\}$ です．

[3] 正確には $\psi_2 = 0$ のときは $\psi_1 \neq 0$ より $\psi_2 = 0$ の周りでは $\gamma_w = \psi_2/\psi_1$ とし，$\psi_1 \neq 0$, $\psi_2 \neq 0$ に対しては $\gamma = 1/\gamma_w$ とします．