Mathématiques colonne 4

381654729

西山　豊

表題の数を見て，あの問題だと気付いた人は，このパズルを一度は解いた経験があるのだろう．これはパズルの答えであるが，この数の特性を説明しておこう．381654729 は 9 桁の数で，1 から 9 までの数字が重複することなく並んでいる．前から 2 桁取った数は 38 であり，これは桁数の 2 で割り切れる．同様に前から 3 桁取った数は 381 であり，これは桁数の 3 で割り切れる．このような割り算が 1 桁から 9 桁のすべてについて成り立っている．読者は確かめてみること．

$$38 \div 2 = 19$$
$$381 \div 3 = 127$$
$$1816 \div 4 = 954$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

1 から 9 までの数字を並べ変えてできる数は，順列より $9! = 362880$ 通りの数があるが，その中で上記の割り算の条件をすべて満たす数は，381654729 だけだというのだ．パズルは解く楽しみがある．答えを知ってしまうと解く気になれないかもしれないが＋，これが唯一の解であることを確かめるのもいいだろう．$9! = 362880$ 通りの数すべてを調べるのも大変だなと思われるかもしれないが，条件を絞っていけばパソコンの力を借りないずとも筆算で解け，中学や高校の数学好きの生徒には格好の問題ともなる．

一般的な解法はつぎのように考えられる．9 桁の数字が 9 で割り切れるかどうかは検査しなくてよいことがわかる．なぜなら，1 から 9 までの数字を重複することなく並べた数であるので，

$$\begin{aligned} &3+8+1+6+5+4+7+2+9 \\ &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 \end{aligned}$$

となり，45 が 9 で割り切れることから，すべての数が 9 で割り切れることになる．

前から 5 桁取った数が 5 で割り切れる条件は，下の桁が 5 か 0 であるから，自ずと 5 桁目が 5 であることが決まる．($xxxx5xxxx$)．残りの 8 個の数字をどのように並べるかであるが，前から 2 桁，4 桁，6 桁，8 桁の数が，2, 4, 6, 8 で割り切れるということは，2 桁目，4 桁目，6 桁目，8 桁目が偶数であることが必要条件である．偶数は $\{2, 4, 6, 8\}$ の 4 つのうちのどれかである．残る 1 桁目，3 桁目，7 桁目，9 桁目は奇数となる．奇数は 5 を除く $\{1, 3, 7, 9\}$ の 4 つのうちのどれかである．したがって，順列の計算により $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ 通りの数について調べればよいことになる．

7 桁の数が 7 で割り切れるかどうかのチェックは次のように考えるとよい．下の桁から 3 桁ずつ区切り，奇数グループの合計と偶数グループの合計の差を求め，その値が 7 で割れるかどうかを調べればよい．たとえば 3816547 は

$$816 - (3 + 547) = 266$$

となり，266 は 7 で割り切れるから，3816547 は 7 で割り切れる．これは 3 や 9 の場合と同様，剰余の考えに基づいている．7 桁の数を $abcdefg$ とすると，$1000d = (7 \times 143 - 1)d$ であるから，剰余だけに注目すると $1000d$ は $-d$ になる．

このパズルはマーチン・ガードナー(1914－2010)が，かつて雑誌『サイエンティフィック・アメリカン』の連載記事「数学ゲーム」のひとつとして出題したものである．誤りやすい解として 147258369 や 783654921 があるが，これらは 8 桁の数が 8 で割り切れない．このパズルにはおまけがついている．0 も数字とみなすと，3816547290 は，10 桁も 10 で割り切れることになる．

(にしやま　ゆたか／大阪経済大学)

数学のプロムナード

O 先生と K 君の数学対話　第 5 回

～整数は易しい？優しい？～

大竹真一

K 君：整数の話は易しく見えて難しいですね．

O 先生：どういうことかな？

K:　説明されればすぐに納得できることでも，なんか，感じというか，腑に落ちないというか.....

O:　「納得して，かつ，腑に落ちない」とは矛盾してはいないかな．

K:　そうなんですけど... 易しそうで難しく...

O:　易しいだけの数学もないし難しいだけの数学もない，そういうものだ．

K:　先生どうしたのですか．急に哲学者みたいなことをおっしゃって．今年の夏も暑かった所為ですか．

O:　......

1．フェルマーの小定理

K:　例えば，フェルマーの小定理ですが．

> (フェルマーの小定理　Fermat's theorem)
> 自然数 a が素数 p と互いに素であるとき，$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つ．

O:　ああ，これね．これがどうかしたというのかな．

K:　自然数 a が素数 p と互いに素であるとき，なんで，a^{p-1} を素数 p で割ると余りが 1 なのかと.... 要するに，実感がないのです．

O:　では，例えば，$p = 7$ のとき 2 は素数 7 と互いに素である．これはいいね．

K:　はい．もちろんです．

O:　このとき，$a = 2$ として a^{p-1} はどうなるかな？

K:　ええっと，

$$2^{7-1} = 2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$$

となります．

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立っています．

O:　$p = 7$ のとき 5 は素数 7 と互いに素である．このときはどうだ．

K:　このときも

$$5^{7-1} = 5^6 = 25^3 \equiv 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$$

でやはり

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立っています．

O:　そういうことだ．実感があるだろう．

K:　でも分かったような分からないような...

O:　物分りの悪い学生だな．

K:　先生，おっしゃり方が冷たいですよ．

O:　残暑厳しいときには冷たいぐらいがちょうどいいのだ．

K:　そんな....

2．mod p についてのべきの表をつくる

O:　では，例えば mod 7 についての剰余類を考えてみよう．

K:　mod 7 について 0, 1, 2, …, 6 と合同な類ですね．7 個あります．つまり，

$$\{\cdots, -7, 0, 7, 14, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -6, 1, 8, 15, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -5, 2, 9, 16, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -4, 3, 10, 17, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -3, 4, 11, 18, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -2, 5, 12, 19, \cdots\}$$
$$\{\cdots, -1, 6, 13, 20, \cdots\}$$

O:　このうち，7 と互いに素なものは一番初めの

$$\{\cdots, -7, 0, 7, 14, \cdots\}$$

以外の 6 個ある．

K:　既約剰余類ですね．

O:　その通りだ．その代表系のべきを，計算してみよう．